

В.А.КОТЕЛЬНИКОВ

**ТЕОРИЯ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ
ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ**

I

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ МАТЕРИАЛ

Глава 1

ВВЕДЕНИЕ

1.1. Методы борьбы с помехами

Обычно на радиоприемники, кроме колебаний от принимаемого радиопередатчика (с и г н а л о в), воздействуют еще колебания от самых разнообразных источников (п о м е х и). Помехи, накладываясь на сигналы, искажают их, что вызывает при телеграфном приеме ошибки, при телефонном — шумы и трески и т.д. При слишком слабых по сравнению с помехами сигналах прием становится невозможным.

Используются следующие способы борьбы с помехами:

1. Уменьшение силы помех путем воздействия на их источники.
2. Увеличение отношения силы сигналов к силе помех путем увеличения мощности передатчиков и применения направленных антенн.
3. Усовершенствование приемников.
4. Изменение формы сигналов при сохранении их мощности с целью облегчить борьбу с помехами в приемнике.

Первые два метода в данной работе не рассматриваются. Она посвящена двум последним методам. Цель ее — выявить, можно ли путем усовершенствования приемников при существующих видах сигналов понизить влияние помех? Что может дать в борьбе с помехами изменение формы сигналов? Какие формы сигналов для этого оптимальны?

1.2. Классификация помех

Помехи радиоприему можно разбить на следующие группы:

А. С и н у с о и д а л ь н ы е п о м е х и в виде одного или конечного, обычно небольшого, числа синусоидальных колебаний. К таким помехам обычно сводятся помехи от паразитного излучения радиостанций или от радиостанций, работающих на близких к принимаемой частотах.

В. И м п у л ь с н ы е п о м е х и в виде одиночных импульсов, следующих один за другим через такие большие промежутки времени, что нестационарные явления в радиоприемнике от одного импульса успевают практически затухнуть к моменту прихода следующего импульса. К таким помехам следует отнести некоторые виды атмосферных помех и помех от электрических приборов.

С. Нормально флюктуационные²⁾ или, как их иногда называют, гладкие помехи, состоящие также из отдельных импульсов, но возникающих один за другим настолько часто через случайные промежутки времени, что нестационарные явления в приемнике от отдельных импульсов накладываются друг на друга в таком числе, что к ним можно применить законы больших чисел теории вероятностей. К таким помехам относятся ламповые шумы, шум от теплового движения электронов в контурах, некоторые виды атмосферных помех и помех от электрических приборов. На сверхвысоких частотах почти исключительно встречаются помехи этого вида.

Д. Импульсные помехи промежуточного типа, когда нестационарные явления в радиоприемнике от отдельных импульсов хотя и накладываются друг на друга, но не в таком большом количестве, чтобы к ним можно было применять с достаточной точностью законы больших чисел. Этот случай помех является промежуточным между случаями В и С.

Методика исследования воздействия синусоидальных и импульсных помех на радиоприемники в настоящее время довольно хорошо разработана.

При импульсных помехах промежуточного типа, когда нестационарные явления от отдельных импульсов начинают накладываться друг на друга, исследования очень сильно затрудняются. Кроме того, в этом случае необходимо знать не только форму отдельных импульсов, но и вероятности сочетания импульсов различных форм, расположенных так или иначе повремени. В большинстве случаев этих данных о помехах мы не имеем, и их получить бывает довольно трудно.

По этим причинам, а также потому, что помехи группы С часто встречаются, мы в дальнейшем будем рассматривать помехи только этой группы и часто называть нормально флюктуационные помехи просто помехами.

1.3. Сообщения и сигналы

Под сообщением мы будем подразумевать то, что должно быть передано.

Сообщения, которыми мы будем заниматься, можно разбить на три группы:

А. Дискретные сообщения.

В. Сообщения в виде отдельных величин (параметров), могущих принимать любые значения в некоторых пределах.

С. Сообщения в виде колебаний, которые могут иметь бесчисленное количество различных форм, непрерывно меняясь.

²⁾ Слово «нормально» нами вставлено, чтобы оттенить то обстоятельство, что мы имеем тут дело с одной из разновидностей возможных флюктуационных колебаний.

К группе дискретных сообщений относятся сообщения, которые передаются в телеграфии. В этом случае они состоят из отдельных букв, цифр, знаков, которые могут принимать конечное число дискретных значений. К таким сообщениям будут относиться также в ряде случаев и сообщения, передаваемые при телеуправлении.

В случае передачи отдельных замеров при помощи телеметрии сообщениями являются величины некоторых параметров, например, температуры, давления и т. п., измеренных через заданные отрезки времени. Эти величины обычно могут принимать любые значения в некоторых пределах. Таким образом, в этом случае нельзя ограничиться конечным числом возможных дискретных сообщений. Такие сообщения будут относиться к группе В.

В случае телефонии сообщениями будут являться звуковые колебания или электрические колебания, поступающие с микрофона, которые могут принимать бесчисленное множество различных форм. Эти сообщения будут относиться к группе С.

В телевидении в качестве сообщения можно принять колебание, поступающее на радиопередатчик. Это сообщение также будет относиться к последней группе.

Мы будем считать, что на вход приемника действует некоторое колебание напряжения, вызванное работой передатчика. Это колебание напряжения мы назвали *сигналом*. Очевидно, каждому возможному значению передаваемого сообщения будет соответствовать свой сигнал. Приемник по этому колебанию напряжения — сигналу должен воспроизводить сообщение, которому этот сигнал соответствует.

1.4. Содержание данной работы

В этой работе мы рассматриваем влияние нормальных флюктуационных помех на передачу сообщений.

Задача, которую мы себе ставим, будет заключаться в следующем.

Будем считать, что, когда на сигнал не накладывается колебание помехи, приемник точно воспроизведет передававшееся сообщение. Если на сигнал наложится помеха, то на вход приемника будет действовать суммарное напряжение, равное напряжению сигнала плюс напряжение от помехи. В этом случае приемник в зависимости от суммарного колебания воспроизведет то или иное сообщение, которое в данном случае может оказаться отличным от передававшегося.

Очевидно, каждому суммарному напряжению, воздействующему на приемник, будет соответствовать определенное сообщение, которое при этом будет воспроизводиться.

У различных приемников это соответствие может быть различным. В зависимости от этого соответствия приемник при данном виде передачи будет в большей или меньшей степени подвержен влиянию помех. Мы найдем, каково должно быть это соответствие, чтобы искажения

сообщений были наименьшими. Приемник, в котором осуществляется это наилучшее соответствие, мы будем называть *идеальным*.

Далее мы определим искажения сообщений вследствие наложения помехи на сигналы при приеме на идеальный приемник.

Полученные при этом искажения будут *минимально возможными* в данных условиях.

При реальных приемниках и тех же условиях искажения не могут быть меньше.

Помехоустойчивость, которая будет характеризоваться этими минимально возможными искажениями, мы назовем *потенциальной помехоустойчивостью*. Эта помехоустойчивость может быть получена и при реальном приемнике, если он близок к идеальному, но она не может быть превзойдена.

Сравнивая потенциальную помехоустойчивость с помехоустойчивостью, которую могут обеспечить данные реальные приемники, можно судить, насколько последние будут близки к совершенству, насколько еще можно путем их улучшения поднять помехоустойчивость, т. е. насколько целесообразно работать над дальнейшим повышением помехоустойчивости при заданном способе передачи.

Знание потенциальной помехоустойчивости позволяет легко обнаруживать и отбрасывать те методы передачи, в которых эта помехоустойчивость получается низкой по сравнению с другими методами. Это можно сделать, совсем не затрагивая методы приема, поскольку реальные приемники не могут обеспечить большую помехоустойчивость, чем потенциальная.

Сравнивая потенциальную помехоустойчивость при различных способах передачи, можно, как мы увидим из дальнейшего, легко выяснить, от каких основных факторов она зависит, и наметить пути, идя по которым ее можно повысить.

Эти положения иллюстрируются в работе целым рядом примеров, имеющих практический интерес. Однако рассмотренные примеры далеко не исчерпывают все возможные случаи применения развитых в работе методов исследования помехоустойчивости.

В этой работе все вопросы рассматриваются для большей наглядности применительно к радиоприему, однако все сказанное прямо применимо и к другим областям, как, например, к проводной связи, акустической и гидроакустической сигнализации и т. п.

Для наглядности и определенности в этой работе рассматриваются также колебания сигнала и помехи как колебания электрического напряжения. Однако ничего не изменится, если вместо этого рассматривать колебания электрического тока, акустического давления или какой-либо другой величины, характеризующей воздействующее на приемник колебание.

В данной работе не учитываются нерегулярные искажения сигналов, которые могут сильно сказываться на работе радиоприемников и их помехоустойчивости. К таким искажениям можно отнести явления

замирания, явления эхо и т. п. Не надо также забывать, что в этой работе в дальнейшем под словом помехи для краткости подразумеваются нормально флуктуационные помехи и именно они только и рассматриваются.

Глава 2

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

2.1. Некоторые определения

Введем некоторые определения, упрощающие дальнейшее изложение.

Примем, что все рассматриваемые нами колебания лежат в интервале $-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}$, что, очевидно, всегда можно сделать, взяв T достаточно большим.

Среднее значение некоторого колебания $A(t)$ за интервал T будем обозначать:

$$\overline{A(t)} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} A(t) dt. \quad (2.1)$$

Скалярным произведением двух функций $A(t)$ и $B(t)$ будем называть среднее значение их произведения за интервал $-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}$. Таким образом, скалярное произведение будет равно:

$$\overline{A(t)B(t)} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} A(t)B(t) dt. \quad (2.2)$$

Из определения ясно, что

$$\overline{A(t)B(t)} = \overline{B(t)A(t)}. \quad (2.3)$$

Далее

$$\overline{A(t)[B(t) + C(t)]} = \overline{A(t)B(t)} + \overline{A(t)C(t)} \quad (2.4)$$

и

$$\overline{[aA(t)][bB(t)]} = ab\overline{A(t)B(t)}, \quad (2.5)$$

где a и b — некоторые постоянные.

Таким образом, скалярное произведение функций обладает теми же свойствами, что и скалярное произведение векторов. Вместо скаляров тут фигурируют постоянные величины, вместо векторов — функции.

Обозначим:

$$\overline{A^2(t)} = \overline{A(t)A(t)} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} A^2(t) dt. \quad (2.6)$$

В дальнейшем часто будет встречаться выражение

$$T\overline{A^2(t)} = \int_{-T/2}^{+T/2} A^2(t) dt. \quad (2.7)$$

Эту величину мы назовем удельной энергией колебания $A(t)$. Она будет равна энергии, которая выделится на сопротивлении в 1 ом при воздействии на него напряжения $A(t)$ вольт.

Величину

$$\sqrt{\overline{A^2(t)}} \quad (2.8)$$

мы будем называть эффективным значением колебания $A(t)$.

Функцию, эффективное значение которой равно единице, будем называть единичной.

Если две функции отличаются только постоянным множителем, то их будем называть совпадающими по направлению.

Единичная функция, совпадающая по направлению с данной функцией $A(t)$, очевидно, будет равна:

$$\frac{A(t)}{\sqrt{\overline{A^2(t)}}}. \quad (2.9)$$

Будем говорить, что функции $A_1(t), A_2(t), \dots, A_n(t)$ ортогональны между собой, если

$$\overline{A_i(t)A_l(t)} = 0 \quad (2.10)$$

для всех $i = 1, 2, \dots, n$ и $l = 1, 2, \dots, n$, кроме $i = l$.

2.2. Линейное выражение функций при помощи единичных ортогональных функций

Если система функций

$$C_1(t), C_2(t), \dots, C_n(t) \quad (2.11)$$

удовлетворяет уравнениям

$$\overline{C_k^2(t)} = 1, \quad (2.12)$$

$$\overline{C_k(t)C_l(t)} = 0, \quad (2.13)$$

где $k = 1, 2, \dots, n$, $l = 1, 2, \dots, n$ и $k \neq l$, то мы ее будем называть системой единичных ортогональных функций.

Примером такой системы функций является система:

$$\left. \begin{aligned} I_0(t) &= 1, \\ I_1(t) &= \sqrt{2} \sin \frac{2\pi}{T}t, \\ I_2(t) &= \sqrt{2} \cos \frac{2\pi}{T}t, \\ I_3(t) &= \sqrt{2} \sin 2\frac{2\pi}{T}t, \\ I_4(t) &= \sqrt{2} \cos 2\frac{2\pi}{T}t, \\ &\dots\dots \\ I_{2m-1}(t) &= \sqrt{2} \sin m\frac{2\pi}{T}t, \\ I_{2m}(t) &= \sqrt{2} \cos m\frac{2\pi}{T}t, \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

поскольку для нее справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \overline{I_k^2(t)} &= 1, \\ \overline{I_k(t)I_l(t)} &= 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

при $k \neq l$.

Мы будем говорить, что некоторую функцию $A(t)$ можно линейно выразить через систему функций

$$C_1(t), C_2(t), \dots, C_n(t), \quad (2.16)$$

если можно записать:

$$A(t) = \sum_{k=1}^n a_k C_k(t), \quad (2.17)$$

при этом некоторые a_k могут равняться нулю.

Примем, что функции (2.16) являются единичными и ортогональными, тогда, умножая обе части равенства (2.17) скалярно на $C_l(t)$, получим после раскрытия скобок с учетом уравнений (2.12) и (2.13):

$$\overline{A(t)C_l(t)} = a_l. \quad (2.18)$$

Коэффициенты a_k назовем координатами функции $A(t)$ в системе (2.16). Очевидно, функция $A(t)$ полностью характеризуется n координатами a_1, \dots, a_n , если система (2.16) задана.

В частном случае, если в качестве системы единичных ортогональных функций взять систему (2.14), получим:

$$A(t) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l I_l(t), \quad (2.19)$$

где

$$a_l = \overline{A(t)I_l(t)}. \quad (2.20)$$

Ряд (2.19) является обычным разложением функции $A(t)$ в ряд Фурье на участке $-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}$. При этом амплитуда косинуса на частоте $\frac{m}{T}$ в соответствии с (2.14) будет $\sqrt{2}a_{2m}$ и амплитуда синуса $\sqrt{2}a_{2m-1}$.

Если колебание $A(t)$ является сигналом, то в сумме (2.19) обычно можно брать лишь конечное число членов, скажем, с номерами от l_1 до l_2 , так как составляющие сигнала за пределами некоторого диапазона частот, как правило, бывают настолько малыми, что они перекрываются составляющими других сигналов, передаваемых на соседних частотах, и помехами.

В этом случае

$$A(t) = \sum_{l=l_1}^{l_2} a_l I_l(t). \quad (2.21)$$

Пусть a_1, \dots, a_n — координаты функции $A(t)$ в системе (2.16), а b_1, \dots, b_n — координаты функции $B(t)$ в той же системе. Тогда

$$\overline{A(t)B(t)} = \overline{\left[\sum_{k=1}^n a_k C_k(t) \right] \left[\sum_{k=1}^n b_k C_k(t) \right]} = \sum_{k=1}^n a_k b_k, \quad (2.22)$$

как это нетрудно получить, раскрыв скобки и используя уравнения (2.12) и (2.13).

Отсюда как частный случай получим:

$$\overline{A^2(t)} = \overline{A(t)A(t)} = \sum_{k=1}^n a_k^2. \quad (2.23)$$

Если $C(t)$ — некоторая единичная функция с координатами c_1, \dots, \dots, c_n , то

$$\sum_{k=1}^n c_k^2 = 1. \quad (2.24)$$

Затем, если функции $A(t)$ и $B(t)$ ортогональны, то в соответствии с формулой (2.22) и условием ортогональности (2.10) получим:

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \overline{A(t)B(t)} = 0. \quad (2.25)$$

Выражения (2.22), (2.23) и (2.25) аналогичны соответствующим выражениям векторного исчисления. Наконец, докажем, что если две

функции

$$A(t) = \sum_{k=0}^n a_k I_k(t),$$

$$B(t) = \sum_{k=0}^n b_k I_k(t)$$

не имеет составляющих с одинаковыми частотами, т. е. для всех индексов $k \neq 0$, всегда хотя бы одна из величин a_k или b_k равна нулю, то

$$\overline{A(t)B(t)} = \overline{A(t)} \overline{B(t)}. \quad (2.26)$$

Действительно, при этих условиях

$$\overline{A(t)B(t)} = a_0 b_0$$

и далее всегда

$$\overline{A(t)} = a_0,$$

$$\overline{B(t)} = b_0,$$

откуда непосредственно следует формула (2.26).

2.3. Нормально флюктуационное колебание

Мы будем рассматривать помехи, состоящие из большого количества коротких импульсов, хаотически расположенных по времени. Колебание такой помехи мы будем называть *нормально флюктуационным*. Таким колебанием является тепловой шум в проводах, дробовой эффект в электронных лампах, а также в ряде случаев атмосферные и промышленные помехи. Это колебание может быть представлено выражением

$$W(t) = \sum_{k=1}^n F_k(t - t_k), \quad (2.27)$$

где $F_k(t - t_k)$ — k -тый импульс помехи, попавший на участок $-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}$.

Будем считать, что импульсы короткие и начинаются в моменты времени t_k . Таким образом,

$$F_k(t - t_k) = 0 \quad \text{при} \quad t < t_k \text{ и } t > t_k + \delta. \quad (2.28)$$

Отметим, что тут импульсы нумеруются индексами k не в порядке их следования по времени, а, скажем, в порядке убывания их амплитуды.

Пусть вероятность того, что t_k попадает на участок длительностью dt , не будет зависеть от положения этого участка в интервале $-T/2, +T/2$, от других импульсов и будет равна dt/T .

Пусть далее $\overline{A(t)} = 0$. Найдем:

$$\overline{W(t)A(t)} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \sum_{k=1}^n F_k(t - t_k) A(t) dt = \sum_{k=1}^n \xi_k, \quad (2.29)$$

где

$$\xi_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} F_k(t - t_k) A(t) dt. \quad (2.30)$$

Считая, что δ настолько мала, что за время δ $A(t)$ меняется мало, получим:

$$\xi_k = \frac{A(t_k)}{T} \int_{t_k}^{t_k + \delta} F_k(t - t_k) dt = \frac{A(t_k)}{T} q_k, \quad (2.31)$$

где

$$q_k = \int_0^{\delta} F_k(t) dt \quad (2.32)$$

— площадь k -того импульса.

Слагаемые ξ_k являются независимыми друг от друга случайными величинами. При увеличении числа этих слагаемых, если они ограничены и сумма их дисперсий неограниченно возрастает, на основании теории вероятностей получим:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k - \sum_{k=1}^n E\xi_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^n D\xi_k}} = \theta_A, \quad (2.33)$$

где

$E\xi_k$ — среднее значение;

$D\xi_k = E(\xi_k - E\xi_k)^2$ — дисперсия величины ξ_k ;

θ_A — случайная величина с законом распределения

$$P(x < \theta_A < x + dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \quad (2.34)$$

Случайные величины с законом распределения (2.34) будем в дальнейшем называть нормальными случайными величинами.

Исходя из (2.33), при достаточно большом n можно считать:

$$\overline{W(t)A(t)} = \sum_{k=1}^n \xi_k = \theta_A \sqrt{\sum_{k=1}^n D\xi_k} + \sum_{k=1}^n E\xi_k. \quad (2.35)$$

Далее из (2.31)

$$E\xi_k = \int_{-T/2}^{+T/2} \frac{q_k}{T} A(t_k) \frac{dt_k}{T} = q_k \overline{\frac{A(t)}{T}} = 0, \quad (2.36)$$

так как по условию $\overline{A(t)} = 0$,

$$D\xi_k = E(\xi_k - E\xi_k)^2 = \int_{-T/2}^{+T/2} \frac{q_k^2}{T^2} A^2(t_k) \frac{dt_k}{T} = \frac{q_k^2}{T^2} \overline{A^2(t)}, \quad (2.37)$$

откуда

$$\overline{W(t)A(t)} = \frac{1}{T} \sqrt{A^2(t) \sum_{k=1}^n q_k^2 \cdot \theta_A} \quad (2.38)$$

Назовем величину

$$\sigma = \sqrt{\frac{2 \sum_{k=1}^n q_k^2}{T}} \quad (2.39)$$

интенсивностью колебания $W(t)$, тогда

$$\overline{W(t)A(t)} = \frac{\sigma}{\sqrt{2T}} \sqrt{A^2(t)} \cdot \theta_A. \quad (2.40)$$

Отметим, что, поскольку сумма должна меняться пропорционально T , величина σ не будет зависеть от T .

Найдем еще

$$\overline{W(t)B(t)},$$

считая, что

$$\overline{B(t)} = 0 \text{ и } \overline{A(t)B(t)} = 0. \quad (2.41)$$

Аналогично сказанному выше получим:

$$\overline{W(t)B(t)} = \sum_{k=1}^n \chi_k, \quad (2.42)$$

где

$$\chi_k = \frac{B(t_k)}{T} q_k \quad (2.43)$$

и

$$\overline{W(t)B(t)} = \frac{\sigma}{\sqrt{2T}} \sqrt{B^2(t)} \cdot \theta_B, \quad (2.44)$$

где θ_B — нормальная случайная величина, удовлетворяющая, как и θ_A , уравнению (2.34). Как доказывается в теории вероятностей, $\sum_{k=1}^n \xi_k$ и $\sum_{k=1}^n \chi_k$ при $n \rightarrow \infty$ будут взаимно независимыми случайными величинами, если

$$E\xi_k\chi_k = 0. \quad (2.45)$$

У нас

$$\begin{aligned} E\xi_k\chi_k &= \int_{-T/2}^{+T/2} \frac{q_k^2}{T^2} A(t_k) B(t_k) \frac{dt_k}{T} = \\ &= \frac{q_k^2}{T^2} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} A(t_k) B(t_k) dt_k = \frac{q_k^2}{T^2} \overline{A(t)B(t)} = 0. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Отсюда следует, что величины θ_A и θ_B будут взаимно независимыми.

Отметим, что это положение и выражения (2.40) и (2.44) будут справедливы и при условии, что $\overline{B(t)} \neq 0$ и $\overline{A(t)} \neq 0$, если вычесть из колебания $W(t)$ его среднее значение и считать T достаточно большим. Это обстоятельство доказываться тут не будет, так как для дальнейшего изложения оно не потребуется.

Мы назвали случайную величину θ нормальной случайной величиной, если вероятность того, что она лежит в интервале $(x, x + \delta)$ будет (2.34).

Из этого определения следует, что вероятность того, что $\theta > x$ будет:

$$P(\theta > x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = V(x). \quad (2.47)$$

Значение этого интеграла может быть найдено из таблиц. Функцию $V(x)$ мы ввели, так как она в дальнейшем будет очень часто встречаться. Графически она представлена на фиг. 2.1.

Вероятность того, что $\theta < x$ будет равна

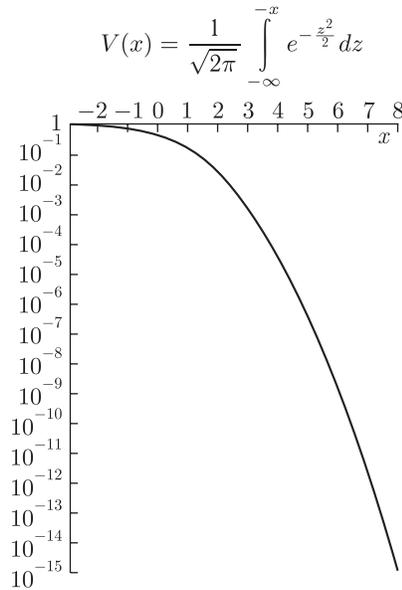
$$P(\theta < x) = 1 - V(x) = V(-x). \quad (2.48)$$

Среднее значение θ будет:

$$E\theta = 0. \quad (2.49)$$

Среднее значение θ^2

$$D\theta = E\theta^2 = 1. \quad (2.50)$$



Фиг. 2.1

2.4. Выражение нормально флуктуационного колебания рядом Фурье

Нормально флуктуационное колебание, введенное в §2.3, может быть представлено рядом Фурье (если отбросить постоянную составляющую)

$$W(t) = \sum_{l=0}^{\infty} w_l I_l(t), \tag{2.51}$$

где

$$w_l = \overline{W(t)I_l(t)}. \tag{2.52}$$

Если $l > 0$, но не настолько велико, чтобы период гармоник стал соизмерим с длительностью импульсов помехи, то согласно (2.40)

$$w_l = \frac{\sigma}{\sqrt{2T}} \theta_l. \tag{2.53}$$

Таким образом, если выделить из помехи составляющую с частотами от $f_\mu = \frac{\mu}{T}$ до $f_\nu = \frac{\nu}{T}$, причем $\mu \geq 1$, а ν не слишком велико, то эта составляющая будет:

$$W_{\mu\nu}(t) = \sum_{l=l_1}^{l_2} \frac{\sigma}{\sqrt{2T}} I_l(t) \theta_l = \frac{\sigma}{\sqrt{2T}} \sum_{l=2\mu-1}^{2\nu} I_l(t) \theta_l =$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{T}} \sum_{l=\mu}^{l_2} \left(\theta_{2l-1} \sin l \frac{2\pi}{T} t + \theta_{2l} \cos l \frac{2\pi}{T} t \right), \quad (2.54)$$

где

$$l_1 = 2\mu - 1, \quad l_2 = 2\nu.$$

Входящие в это выражение θ_l постоянны на участке $-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}$, но они, как случайные величины, будут меняться от опыта к опыту.

Следует еще иметь в виду, что в соответствии с § 2.3 все θ_l взаимно независимы, поскольку все $I_l(t)$ взаимно ортогональны.

Колебание $W_{\mu,\nu}(t)$ будем называть нормально флуктуационным колебанием с постоянной интенсивностью и частотами от $\frac{\mu}{T}$ до $\frac{\nu}{T}$.

Средний квадрат этого колебания за время T будет в соответствии с (2.23) и (2.54)

$$\overline{W_{\mu,\nu}^2(t)} = \frac{\sigma^2}{2T} \sum_{l=2\mu-1}^{2\nu} \theta_l^2. \quad (2.55)$$

Или, беря среднее значение по ряду опытов, получим для квадрата эффективного значения выражение

$$H^2 = E \overline{W_{\mu,\nu}^2(t)} = \frac{\sigma^2}{2T} \sum_{l=2\mu-1}^{2\nu} E \theta_l^2, \quad (2.56)$$

и так как $E \theta_l^2 = 1$, то

$$H^2 = E \overline{W_{\mu,\nu}^2(t)} = \frac{\sigma^2}{2T} (2\nu - 2\mu) = \sigma^2 (f_\nu - f_\mu), \quad (2.57)$$

откуда

$$\sigma = \sqrt{\frac{E \overline{W_{\mu,\nu}^2(t)}}{f_\nu - f_\mu}} = \frac{H}{\sqrt{f_\nu - f_\mu}}. \quad (2.58)$$

Таким образом, σ есть эффективное значение колебания $W_{\mu,\nu}(t)$, приходящееся на 1 гц.

Докажем, что если некоторые колебания $A(t)$ и $B(t)$ удовлетворяют условию

$$\overline{A(t)} = 0, \quad \overline{B(t)} = 0, \quad \overline{A(t)B(t)} = 0 \quad (2.59)$$

и могут быть представлены рядами Фурье, не содержащими слагаемых с частотами меньше $f_\mu = \frac{\mu}{T}$ и больше $f_\nu = \frac{\nu}{T}$, то

$$\overline{W_{\mu,\nu}(t)A(t)} = \frac{\sigma}{\sqrt{2T}} \sqrt{\overline{A^2(t)}} \cdot \theta_A, \quad (2.60)$$

$$\overline{W_{\mu,\nu}(t)B(t)} = \frac{\sigma}{\sqrt{2T}} \sqrt{\overline{B^2(t)}} \cdot \theta_B, \quad (2.61)$$

где θ_A и θ_B — нормальные взаимно независимые случайные величины.

Действительно, колебание (2.51) может быть записано так:

$$W(t) = W'(t) + W_{\mu,\nu}(t) + W''(t), \quad (2.62)$$

где

$$W'(t) = \sum_{l=1}^{2\mu-2} w_l I_l(t), \quad (2.63)$$

$$W''(t) = \sum_{l=2\nu+1}^{\infty} w_l I_l(t), \quad (2.64)$$

Тогда по условию $W'(t)$ и $W''(t)$ не будут иметь составляющих с частотами, совпадающими с частотами слагаемых колебаний $A(t)$ и $B(t)$. Поэтому

$$\left. \begin{aligned} \overline{W'(t)A(t)} &= 0, & \overline{W''(t)A(t)} &= 0, \\ \overline{W'(t)B(t)} &= 0, & \overline{W''(t)B(t)} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.65)$$

откуда, умножая скалярно обе части уравнения (2.62) на $A(t)$ и $B(t)$, на основании формул (2.40) и (2.44) получим выражения (2.60) и (2.61).

Для упрощения мы будем рассматривать часто случайную функцию

$$\Theta(t) = \sum_{l=2\mu-1}^{2\nu} \theta_l I_l(t) = \sum_{l=1}^n \theta'_l I'_l(t), \quad (2.66)$$

которая отличается от колебания $W_{\mu,\nu}(t)$ постоянным множителем $\frac{\sigma}{\sqrt{2T}}$.

Тут обозначено

$$\left. \begin{aligned} \theta'_l &= \theta_{l+2\mu-2}, & I'_l(t) &= I_{l+2\mu-2}(t), \\ n &= 2\nu - (2\mu - 2). \end{aligned} \right\} \quad (2.67)$$

В соответствии с (2.60)

$$\overline{\Theta(t)A(t)} = \sqrt{\overline{A^2(t)}} \cdot \theta_A, \quad (2.68)$$

поскольку $W_{\mu,\nu}(t)$ равна $\Theta(t)$, если $\frac{\sigma}{\sqrt{2T}} = 1$.

2.5. Линейные функции независимых нормальных случайных величин

Найдем линейную функцию

$$\sum_{l=1}^n a_l \theta_l \quad (2.69)$$

от независимых нормальных случайных величин θ_l , где a_l — любые постоянные.

Положим

$$A(t) = \sum_{l=1}^n a_l I_l(t), \quad (2.70)$$

$$\Theta(t) = \sum_{l=1}^n \theta_l I_l(t). \quad (2.71)$$

Тогда в соответствии с (2.22)

$$\overline{A(t)\Theta(t)} = \sum_{l=1}^n a_l \theta_l. \quad (2.72)$$

С другой стороны, на основании (2.68) и (2.23)

$$\overline{A(t)\Theta(t)} = \sqrt{\overline{A^2(t)}} \cdot \theta_A = \sqrt{\sum_{l=1}^n a_l^2} \cdot \theta_A, \quad (2.73)$$

откуда

$$\sum_{l=1}^n a_l \theta_l = \sqrt{\sum_{l=1}^n a_l^2} \cdot \theta_A. \quad (2.74)$$

Аналогично

$$\sum_{l=1}^n b_l \theta_l = \sqrt{\sum_{l=1}^n b_l^2} \cdot \theta_B, \quad (2.75)$$

причем, если

$$\sum_{l=1}^n a_l b_l = 0, \quad (2.76)$$

то θ_A и θ_B будут независимыми нормальными случайными величинами.

Действительно, полагая

$$B(t) = \sum_{l=1}^n b_l I_l(t), \quad (2.77)$$

получим аналогично предыдущему

$$\overline{B(t)\Theta(t)} = \sum_{l=1}^n b_l \theta_l = \sqrt{\sum_{l=1}^n b_l^2} \cdot \theta_B,$$

причем в соответствии с (2.76) и (2.22) $\overline{A(t)B(t)} = 0$, и поэтому на основании (2.60) и (2.61) θ_A и θ_B будут независимы.

2.6. Вероятность попадания нормально флуктуационного колебания в данную область

Мы будем говорить, что функция лежит в некоторой области, если ее координаты удовлетворяют условиям, определяющим эту область.

Найдем вероятность того, что функция (2.66) будет лежать в элементарной области, определяемой условиями:

$$\begin{aligned} y_1 < \theta'_1 < y_1 + dy_1, \\ \dots \dots \\ y_n < \theta'_n < y_n + dy_n. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Поскольку θ'_i , входящие в эти неравенства, являются независимыми нормальными случайными величинами, которые удовлетворяют соотношениям (2.34), то вероятность того, что все неравенства (2.78) одновременно удовлетворятся, будет равна:

$$\begin{aligned} P(2.78) &= \frac{dy_1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_1^2}{2}} \frac{dy_2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_2^2}{2}} \dots \frac{dy_n}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_n^2}{2}} = \\ &= \frac{dy_1 dy_2 \dots dy_n}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n y_i^2}. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Вероятность того, что функция $\Theta(t)$ будет лежать в некоторой области, скажем области R , которую можно разбить на элементарные области вида (2.78), очевидно, будет равна сумме вероятностей того, что эта функция попадет в одну из элементарных областей, на которые область R разбита. Так как элементарные области бесконечно малы, то эта сумма сведется к интегралу:

$$P[\Theta(t) \in R] = \int \int \dots \int_{\text{по } R} \frac{dy_1 dy_2 \dots dy_n}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n y_i^2}, \quad (2.80)$$

который берется по значениям y_1, \dots, y_n , удовлетворяющим области R .

В случае, если область R настолько мала, что $\sum_{i=1}^n y_i^2$ при интегрировании по этой области может быть принята постоянной, то показательную функцию можно вынести за знак интеграла, и мы получим:

$$P[\Theta(t) \in R] = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n y_i^2} \Delta V, \quad (2.81)$$

где обозначено:

$$\Delta V = \int \int \dots \int_{\text{по } R} dy_1 dy_2 \dots dy_n. \quad (2.82)$$

Величину ΔV , используя терминологию трехмерного пространства, мы будем называть объемом области R .

Если некоторая функция

$$Y(t) = \sum_{i=1}^n y_i I_i'(t) \quad (2.83)$$

лежит в области R , то в формулу (2.81) могут быть подставлены координаты этой функции. Согласно формуле (2.23) имеем:

$$\overline{Y^2(t)} = \sum_{i=1}^n y_i^2, \quad (2.84)$$

поэтому

$$P[\Theta(t) \in R] = \frac{\Delta V}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}\overline{Y^2(t)}}. \quad (2.85)$$

Из этой формулы можно сделать следующий вывод.

Вероятность того, что случайная функция $\Theta(t)$, определяемая формулой (2.66), окажется лежащей в некоторой малой области, в которой лежит и функция $Y(t)$, будет пропорциональна объему этой области и будет зависеть еще только от эффективного значения функции $Y(t)$, убывая с увеличением этого значения.

Под малой областью мы тут понимаем такую область, для которой эффективные значения всех лежащих в ней функций могут при взятии интеграла (2.80) считаться одинаковыми.

2.7. Геометрическое толкование полученных соотношений

Полученные в этой главе соотношения, а также соотношения, которые мы получим в дальнейшем, допускают толкование при помощи геометрии многомерного пространства.

Хотя непосредственно образы многомерного пространства не очень наглядны, но все же такое толкование дает ряд удобств, в особенности для тех, кто имеет склонность к геометрическому мышлению.

Дело в том, что соотношения, справедливые для любого многомерного пространства, справедливы и для частных случаев — пространств трехмерного и двумерного. Это позволяет предугадывать и проверять общие свойства пространств со многими измерениями на наглядных образах обычной геометрии.

Кроме того, применение терминологии и образов, взятых из геометрий трехмерного пространства, позволяет легче запоминать полученные соотношения.

Мы условились, что будем рассматривать функции в интервале T и с частотами, лежащими в некоторых пределах. В этом случае рассматриваемые функции могут быть представлены в виде:

$$A(t) = \sum_{l=2\mu-1}^{2\nu} a_l I_l(t),$$

где $I_l(t)$ — вполне определенные функции, даваемые равенствами (2.14).

Таким образом, любая рассматриваемая функция будет полностью определяться $n = 2\nu - 2\mu$ величинами a_l .

Мы можем эту функцию условно представлять некоторым радиусом-вектором n -мерного пространства, конец которого имеет координаты $a_{2\mu-1}, a_{2\mu}, \dots, a_{2\nu}$, или точкой конца этого вектора. Такой вектор мы будем называть вектором, соответствующим функции $A(t)$ или кратко вектором функции $A(t)$. В случае $n = 2$ такое представление особо наглядно.

Функция $I_l(t)$ будет иметь все координаты, равные нулю, кроме координаты с номером l , которая будет равна единице. Таким образом, радиус-вектор, соответствующий функции $I_l(t)$, будет лежать на оси с номером l и иметь длину, равную единице.

Нетрудно видеть, что вектор суммы нескольких функций будет равен сумме векторов слагаемых функций. Вектор разности функций — разности векторов этих функций.

При принятых в § 2.1 определениях скалярное произведение функций равно скалярному произведению соответствующих им векторов, как это следует из формулы (2.22).

Таким образом, сложение, вычитание и скалярное умножение функций можно заменить сложением, вычитанием и скалярным умножением их векторов.

Далее ортогональным функциям будут соответствовать ортогональные векторы. Функциям, совпадающим по направлению, — векторы, совпадающие по направлению.

Величина эффективного значения функции, квадрат которого дается выражением (2.23), равна длине вектора, соответствующего этой функции. В соответствии с этим квадрат расстояния между точками, соответствующими функциям $A(t)$ и $B(t)$ будет равен:

$$[A(t) - B(t)]^2.$$

Единичной функции соответствует единичный вектор.

Системе единичных ортогональных функций соответствует система единичных ортогональных векторов.

Введенное в § 2.6 формулой (2.82) понятие объема области соответствует объему в пространстве, в котором мы строим векторы.

Случайной функции $\Theta(t)$, определенной уравнением (2.66), соответствует случайный радиус-вектор. Вероятность того, что конец этого вектора попадет в тот или иной малый объем ΔV , определяется формулой (2.85). Как видно из этой формулы, эта вероятность пропорциональна объему ΔV и зависит еще от расстояния этого объема от начала координат. Это расстояние равно величине $\sqrt{Y^2(t)}$.

Из формулы (2.68) следует, что проекция вектора, соответствующего $\Theta(t)$, на любое направление, равная скалярному произведению

единичного вектора, совпадающего с данным направлением, на вектор, соответствующий $\Theta(t)$, всегда равна нормальной случайной величине. Проекция вектора, соответствующего $\Theta(t)$, на ортогональное направления будут независимые между собой нормальные случайные величины.

Все, что говорилось здесь о векторе, соответствующем случайному колебанию $\Theta(t)$, может быть перенесено на вектор, соответствующий колебанию помехи $W_{\mu,\nu}(t)$, поскольку эти колебания отличаются лишь постоянным множителем.

II

ПЕРЕДАЧА ДИСКРЕТНЫХ СООБЩЕНИЙ

Глава 3

ИДЕАЛЬНЫЙ ПРИЕМНИК ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ

3.1. Дискретные сообщения и сигналы

В этой части мы будем рассматривать передачу дискретных сообщений, т. е. сообщений, могущих иметь конечное число вполне определенных вариантов, и влияние на такую передачу помех.

Как уже говорилось, к передачам с дискретными сообщениями относятся: телеграфия, телеуправление, если в нем предусматривается конечное число определенных команд, сигнализация и т. п.

Уточним на примере телеграфии, что мы будем понимать под сообщением.

Как уже говорилось, под сообщением вообще мы будем подразумевать то, что должно быть передано. Так, сообщением мы можем назвать целую телеграмму, отдельные слова, входящие в нее, отдельные знаки, из которых слова составлены. Сообщением можно назвать и напряжение, соответствующее передаваемому слову или знаку, которое создается передающим телеграфным аппаратом и которое должно быть передано на приемный телеграфный аппарат. Обычно это напряжение состоит из отдельных элементарных посылок, следующих друг за другом. Например, при использовании телеграфного пятизначного кода напряжение, соответствующее одному знаку, будет состоять из пяти посылок. Каждую такую посылку мы можем также рассматривать как сообщение.

Таким образом, под сообщением можно подразумевать как текст телеграммы и составляющие его элементы, так и напряжение, поступающее с передающего телеграфного аппарата, и его элементы. Сообщение может быть сложным и состоять из ряда следующих друг за другом более простых сообщений.

Для упрощения мы будем предполагать, что в случае, когда телеграфный аппарат ничего не передает, передается сообщение о том, что приемный телеграфный аппарат ничего не должен печатать.

Приемник должен воспроизводить переданное сообщение. Поэтому в случае, когда мы будем принимать за сообщение отдельные знаки, слова или телеграммы, печатающий телеграфный аппарат должен включаться как составная часть в приемник.

Пусть в рассматриваемой системе предусматривается передача сообщений, могущих принимать m значений.

Будем считать, что каждому значению сообщения будет соответствовать определенный сигнал, т. е. колебание, которое будет воздействовать на приемник при передаче этого сообщения в отсутствие помех.

Обозначим эти m значений сигнала через

$$A_1(t), A_2(t), \dots, A_m(t). \quad (3.1)$$

В частном случае один из этих сигналов может равняться нулю.

Мы можем эти сигналы при помощи формулы (2.21) представить так:

$$A_k(t) = \sum_{l=l_1}^{l_2} a_{kl} I_l(t). \quad (3.2)$$

Пусть на это колебание сигнала накладывается помеха. Будем считать, что для всех частот, входящих в сумму, интенсивность этой помехи будет одинаковой и равной σ . В этом случае суммарное колебание, воздействующее на приемник при передаче сигнала $A_k(t)$, будет равно:

$$X(t) = \sum_{l=l_1}^{l_2} x_l I_l(t) = W_{\mu, \nu}(t) + A_k(t), \quad (3.3)$$

где $W_{\mu, \nu}(t)$ — колебание помехи, которое будет определяться формулой (2.54).

В этом выражении мы производим суммирование по всем частотам, на которые может реагировать приемник. Исходя из формул (3.2), (3.3) и (2.54), мы получим:

$$x_l = \frac{\sigma}{\sqrt{2T}} \theta_l + a_{kl}. \quad (3.4)$$

Воздействующее на приемник колебание $X(t)$ будет полностью характеризоваться координатами $x_{l_1}, x_{l_1+1}, \dots, x_{l_2}$.

3.2. Идеальный приемник

Мы будем считать, что в зависимости от воздействующего на приемник суммарного колебания $X(t)$ он обязательно воспроизведет одно из возможных значений сообщения.

Очевидно, для каждого приемника из всех возможных значений $X(t)$, т. е. из всех возможных значений совокупности $x_{l_1}, x_{l_1+1}, \dots, x_{l_2}$, можно выделить область таких значений, при которых приемником будет воспроизводиться сообщение, соответствующее сигналу $A_1(t)$. Эту область назовем областью сигнала $A_1(t)$. Точно так же можно выделить область таких значений, при которых будет воспроизводиться сообщение, соответствующее сигналу $A_2(t)$. Назовем эту область областью сигнала $A_2(t)$ и т. д.

Очевидно также, что в нашем случае всю область возможных значений $X(t)$ можно разбить таким образом на m не перекрывающихся друг друга областей.

Пусть посылался сигнал $A_k(t)$. В этом случае приходящее на приемник колебание $X(t)$ при наличии помехи будет характеризоваться координатами (3.4), которые могут принять, вообще говоря, любые значения, поскольку θ_l взаимно независимые случайные нормальные величины. Таким образом, с некоторой вероятностью колебание $X(t)$ может попасть в любую область. Допустим, что оно попало в область $A_i(t)$, причем $i \neq k$. В этом случае приемник воспроизведет ошибочно сообщение, соответствующее сигналу $A_i(t)$, вместо сообщения, соответствовавшего сигналу $A_k(t)$.

Очевидно, в зависимости от конфигурации областей, которая определяется приемным устройством, будет получаться больше или меньше правильно воспроизведенных сообщений. Мы поставим перед собой задачу при заданных сигналах (3.1) выбрать области значений колебания $X(t)$ так, чтобы число неправильно воспроизведенных сообщений было минимально, или, что то же самое, чтобы вероятность правильного воспроизведения сообщения была максимальной. Приемник, характеризуемый такими областями и дающий вследствие этого минимальное число неправильно воспроизведенных сообщений при наложении помехи, мы будем называть *идеальным*.

Для определения конфигурации областей, характеризующих идеальный приемник, введем следующие обозначения:

$P(A_k)$ — вероятность а priori того, что будет послан сигнал A_k ;

$P_{A_k}(X)$ — условная вероятность прихода колебания $X(t)$ с координатами

$$\begin{aligned} y_{l_1} < x_{l_1} < y_{l_1} + dy_{l_1}, \\ \dots \\ y_{l_2} < x_{l_2} < y_{l_2} + dy_{l_2}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

если известно, что был послан сигнал $A_k(t)$;

$P_X(A_k)$ — условная вероятность того, что был послан сигнал $A_k(t)$, если пришедшее колебание известно и равно $X(t)$, т. е. соответствует неравенствам (3.5);

$P(X) = \sum_{k=1}^m P(A_k)P_{A_k}(X)$ — вероятность, что пришедшее колебание будет $X(t)$.

При этих обозначениях вероятность, что одновременно будет послан сигнал $A_k(t)$ и придет колебание $X(t)$, будет:

$$P(A_k)P_{A_k}(X) = P(X)P_X(A_k), \quad (3.6)$$

откуда

$$P_X(A_k) = \frac{P(A_k)P_{A_k}(X)}{P(X)} = \frac{P(A_k)P_{A_k}(X)}{\sum_{l=1}^m P(A_l)P_{A_l}(X)}. \quad (3.7)$$

Если при приходе колебания $X(t)$ приемник будет воспроизводить сообщение, соответствующее сигналу $A_k(t)$, то вероятность правиль-

ного воспроизведения при приходе этого колебания будет, очевидно, равна $P_X(A_k)$.

Аналогично, если при приходе колебания $X(t)$ приемник будет воспроизводить сообщение, соответствующее колебанию $A_l(t)$, то вероятность правильного воспроизведения будет $P_X(A_l)$.

Таким образом, для получения при приходе колебания $X(t)$ максимальной вероятности правильного воспроизведения сигнала надо, чтобы приемник при этом воспроизводил сообщения, соответствующие тому сигналу, для которого величина $P_X(A_k)$ будет наибольшей, или, другими словами, для этого надо приемник построить так, чтобы колебание $X(t)$ относилось к области того сигнала $A_k(t)$, для которого $P_X(A_k)$ максимально. Этот приемник будет обеспечивать максимальную вероятность правильного воспроизведения сообщений. Любой другой приемник не сможет увеличить эту вероятность.

В соответствии с (3.7) идеальный приемник при приходе колебания $X(t)$ должен воспроизводить сообщение, соответствующее тому сигналу $A_k(t)$, который даст максимальную величину выражения

$$P(A_k)P_{A_k}(X). \quad (3.8)$$

В этом выражении величина $P(A_k)$ должна быть задана — она определяется характером передаваемых сообщений. Величина $P_{A_k}(X)$ по определению равна вероятности того, что колебание помехи примет такое значение, что, сложившись с сигналом $A_k(t)$, она даст колебание $X(t)$, которое должно удовлетворять соотношениям (3.5).

Исходя из равенства (3.4), вероятность этого будет равна вероятности того, что θ_l будут удовлетворять неравенствам

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sqrt{2T}}{\sigma}(y_{l_1} - a_{l_1k}) < \theta_{l_1} < \frac{\sqrt{2T}}{\sigma}(y_{l_1} - a_{l_1k} + dy_{l_1}); \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\sqrt{2T}}{\sigma}(y_{l_2} - a_{l_2k}) < \theta_{l_2} < \frac{\sqrt{2T}}{\sigma}(y_{l_2} - a_{l_2k} + dy_{l_2}). \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Вероятность последнего в соответствии с § 2.6 и формулами (2.78) и (2.79) будет равна:

$$P_{A_k}(X) = \left(\frac{2T}{\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{dy_{l_1} \dots dy_{l_2}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{T}{\sigma^2} \sum_{l=l_1}^{l_2} (y_l - a_{kl})^2},$$

где $n = l_2 - l_1 + 1$.

Далее, при бесконечно малых $dy_{l_1}, \dots, dy_{l_2}$:

$$\sum_{l=l_1}^{l_2} (y_l - a_{kl})^2 = \sum_{l=l_1}^{l_2} (x_l - a_{kl})^2 = \overline{[X(t) - A_k(t)]^2},$$

откуда следует:

$$P(A_k)P_{A_k}(X) = \frac{dy_{l_1} \dots dy_{l_n}}{\left(\sqrt{\frac{\pi}{T}}\sigma\right)^n} e^{-\frac{T}{\sigma^2}[\overline{X(t)-A_k(t)}]^2 + \ln P(A_k)}. \quad (3.10)$$

Эта величина будет тем больше, чем больше показатель.

Поэтому мы получим наибольшую вероятность правильного воспроизведения сообщений, если приемник выберем так, что $X(t)$ будет всегда относиться к области того сигнала, для которого величина

$$\begin{aligned} \overline{T[X(t) - A_k(t)]^2} - \sigma^2 \ln P(A_k) &= \\ &= \int_{-T/2}^{+T/2} [X(t) - A_k(t)]^2 dt - \sigma^2 \ln P(A_k) \end{aligned} \quad (3.11)$$

будет иметь наименьшее значение.

3.3. Геометрическое толкование материала гл. 3

Как мы уже говорили, каждое колебание ограниченной длительности с ограниченным спектром частот может быть представлено точкой или радиусом-вектором в многомерном пространстве.

Таким образом, каждый из m рассматриваемых в этой главе сигналов может быть представлен своим радиусом-вектором или точкой.

Если на приходящий сигнал наложится колебание помехи, вектор которого может принять любое направление и любую длину, то результирующее приходящее колебание $X(t)$ будет также характеризоваться некоторой точкой в пространстве, которая чаще всего не будет совпадать ни с одной из точек, соответствующих сигналам. В зависимости от положения этой точки приемник будет воспроизводить то или другое сообщение. Если объединить все точки нашего пространства, которые будут соответствовать приходящим колебаниям, при которых приемником воспроизводится сообщение, соответствующее сигналу $A_k(t)$, то мы получим область пространства, которую мы назвали областью сигнала $A_k(t)$. Поскольку мы считали, что при любом приходящем колебании обязательно воспроизводится одно из возможных сообщений, то каждая точка пространства будет обязательно попадать в область какого-либо сигнала.

Мы видели, как эти области должны быть выбраны при идеальном приемнике.

В простейшем случае, когда все сигналы равновероятны [все $P(A_k)$ равны между собою], область сигнала $A_k(t)$ должна охватывать элементы пространства, которые лежат ближе к точке $A_k(t)$, чем к любой

другой точке, изображающей сигнал, т. е. элементы пространства, для которых

$$\overline{[X(t) - A_k(t)]^2} < \overline{[X(t) - A_l(t)]^2},$$

где $A_l(t)$ — любой из возможных сигналов, отличный от $A_k(t)$.

Это естественно, так как чем меньше длина вектора помехи, тем эта помеха вероятнее, и потому вероятнее всего, что данное пришедшее колебание образовалось путем прибавления вектора помехи к концу ближайшего радиуса-вектора сигнала.

Глава 4

ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ СИГНАЛАХ С ДВУМЯ ДИСКРЕТНЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ

4.1. Вероятность искажения при идеальном приемнике

Даже при идеальном приемнике будет происходить иногда неправильное воспроизведение сообщений вследствие искажения колебания сигнала накладывающейся на него помехой. Найдем вероятность такого неправильного воспроизведения или, как мы будем говорить, вероятность искажения. Эта вероятность будет характеризовать помехоустойчивость при приеме на идеальный приемник, т. е. потенциальную помехоустойчивость при данном виде сигналов. Вероятность искажения при приеме на реальный приемник может достигать этой величины, но не может быть меньше ее.

В этой главе мы рассмотрим помехоустойчивость для сигналов, могущих иметь только два значения $A_1(t)$ и $A_2(t)$. Этот случай представляет большой практический интерес, поскольку дискретные сигналы часто состоят из следующих друг за другом элементарных сигналов, каждый из которых имеет только два значения.

В соответствии со сказанным в § 3.2 идеальный приемник в этом случае должен воспроизвести сообщение, соответствующее сигналу $A_1(t)$, если

$$\overline{T[X(t) - A_1(t)]^2} - \sigma^2 \ln P(A_1) < \overline{T[X(t) - A_2(t)]^2} - \sigma^2 \ln P(A_2) \quad (4.1)$$

и сигналу $A_2(t)$ — в противном случае.

Пусть был послан сигнал $A_1(t)$. Найдем вероятность того, что помеха примет такое значение, что идеальное приемное устройство воспроизведет ошибочно сообщение, соответствующее сигналу $A_2(t)$.

Вероятность этого будет равна вероятности невыполнения неравенства (4.1) при подстановке в него величины

$$X(t) = A_1(t) + W_{\mu, \nu}(t),$$

т. е. вероятности выполнения неравенства

$$\overline{TW_{\mu,\nu}^2(t)} - \sigma^2 \ln P(A_1) > T \overline{[W_{\mu,\nu}(t) + A_1(t) - A_2(t)]^2} - \sigma^2 \ln P(A_2).$$

Раскроем скобки в этом выражении в соответствии с правилами, выведенными в § 2.1. Получим:

$$\begin{aligned} \overline{TW_{\mu,\nu}^2(t)} - \sigma^2 \ln P(A_1) > \overline{TW_{\mu,\nu}^2(t)} + \\ + 2T \overline{W_{\mu,\nu}(t)[A_1(t) - A_2(t)]} + T \overline{[A_1(t) - A_2(t)]^2} - \sigma^2 \ln P(A_2), \end{aligned}$$

откуда, сокращая и пользуясь формулой (2.60), получим:

$$\begin{aligned} -\sigma^2 \ln P(A_1) > \sigma \sqrt{2T} \cdot \sqrt{\overline{[A_1(t) - A_2(t)]^2}} \cdot \theta + \\ + T \overline{[A_1(t) - A_2(t)]^2} - \sigma^2 \ln P(A_2) \end{aligned}$$

или

$$\theta < \frac{1}{2} \ln \frac{P(A_2)}{P(A_1)} \frac{\sqrt{2} \sigma}{\sqrt{T \overline{[A_1(t) - A_2(t)]^2}}} - \frac{\sqrt{T \overline{[A_1(t) - A_2(t)]^2}}}{\sqrt{2} \sigma}.$$

Вероятность этого неравенства может быть определена по формуле (2.48).

Таким образом, вероятность того, что из-за наложения на сигнал $A_1(t)$ флюктуационной помехи идеальный приемник воспроизведет неправильное сообщение, соответствующее сигналу $A_2(t)$, будет равна:

$$P(A_2 \text{ вместо } A_1) = V(\alpha_{21}), \quad (4.2)$$

где обозначено:

$$\alpha_{21} \approx \alpha + \frac{1}{2\alpha} \ln \frac{P(A_1)}{P(A_2)}, \quad (4.3)$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{T \overline{[A_1(t) - A_2(t)]^2}}}{\sqrt{2} \sigma} = \sqrt{\frac{1}{2\sigma^2} \int_{-T/2}^{+T/2} [A_1(t) - A_2(t)]^2 dt} \quad (4.4)$$

и V дается фиг. 2.1.

Совершенно аналогично вероятность того, что посланный сигнал $A_2(t)$ будет идеальным приемником ошибочно воспринят как $A_1(t)$, будет:

$$P(A_1 \text{ вместо } A_2) = V(\alpha_{12}), \quad (4.5)$$

где

$$\alpha_{12} = \alpha + \frac{1}{2\alpha} \ln \frac{P(A_2)}{P(A_1)}. \quad (4.6)$$

Отсюда вероятность искажения при идеальном приемном устройстве и двух сигналах будет:

$$P_{(иск.)} = P(A_1)V(\alpha_{21}) + P(A_2)V(\alpha_{12}). \quad (4.7)$$

Как видно из полученных формул, вероятность искажения, определяющая потенциальную помехоустойчивость, зависит от двух факторов:

от отношения

$$\frac{P(A_1)}{P(A_2)}$$

и от

$$\alpha^2 = \frac{T[A_1(t) - A_2(t)]^2}{2\sigma^2} = \frac{1}{2\sigma^2} \int_{-T/2}^{+T/2} [A_1(t) - A_2(t)]^2 dt.$$

Первый фактор зависит исключительно от передаваемых сообщений.

Второй фактор α зависит от отношения удельной энергии разности сигналов к квадрату интенсивности помехи σ^2 . Чем больше будет это отношение, тем меньше вероятность искажения и тем больше потенциальная помехоустойчивость. В этом факторе при заданной интенсивности помехи σ мы можем менять только удельную энергию разности сигналов. Те системы, в которых эта энергия будет больше, смогут при достаточно хороших приемниках обеспечить большую помехоустойчивость.

В геометрических терминах σ и потенциальная помехоустойчивость будут определяться расстоянием

$$\sqrt{[A_1(t) - A_2(t)]^2}$$

между точками, изображающими сигналы, и будут тем больше, чем больше это расстояние.

Отметим еще, что полученная вероятность искажения не будет зависеть от периода разложения T , так как по условию этот период должен быть выбран настолько большим, что сигналы будут полностью укладываться в интервал $\left(-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}\right)$. Она также не зависит от границ суммирования по частоте, лишь бы они охватывали все частоты, входящие в сигналы.

Полученная величина вероятности искажения связана со средним числом неправильно принятых сообщений следующим соотношением — число неправильно принятых сигналов в среднем будет равно:

$$NP_{(иск.)},$$

где N — общее число переданных сигналов.

4.2. Влияние отношения $P(A_1)/P(A_2)$

Формула (4.7) упрощается, если посылка обоих сигналов равновероятна. В этом случае $P(A_1) = P(A_2) = 0,5$ и

$$P_{(иск.)} = V(\alpha). \tag{4.8}$$

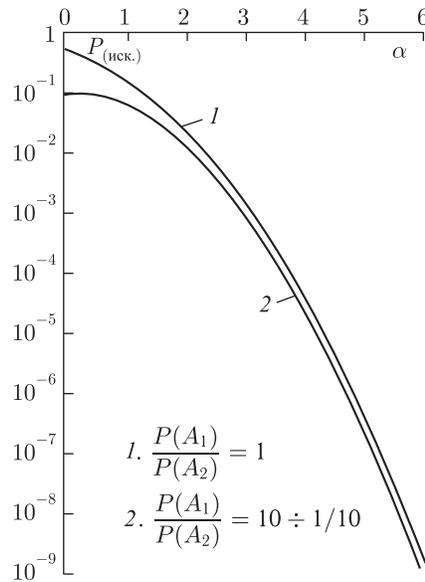
В случае помехи с малой интенсивностью σ , когда $\alpha \gg 1$, в выражениях для α_{21} и α_{12} вторым членом можно будет пренебречь, и так как $P(A_1) + P(A_2) = 1$, то для этого случая формула (4.7) также сведется к формуле (4.8).

На фиг. 4.1 кривая 1 дает зависимость $P_{(иск.)}$ от α для случая $P(A_1)/P(A_2) = 1$ и кривая 2 — ту же зависимость для случая $P(A_1)/P(A_2) = 10$ или $0,1$. Эти зависимости были получены на основании формул (4.8) и (4.7) соответственно. Как видно из этих кривых, а также из анализа полученных формул, $P_{(иск.)}$ будет уменьшаться тем больше, чем больше $P(A_1)/P(A_2)$ будет отличаться от единицы. В пределе, когда $P(A_1)/P(A_2) = \infty$, мы получим, независимо от α , $P_{(иск.)} = 0$. Этот результат очевиден, так как в данных условиях посланный сигнал заранее известен.

В случае, если $P(A_1) = P(A_2)$, области идеального приемника, соответствующие сигналам $A_1(t)$ и $A_2(t)$, не будут зависеть от интенсивности помехи σ , как это следует из § 4.1. В случае, если $P(A_1) \neq P(A_2)$, они должны зависеть от σ . Это значит, что в идеальном приемнике режим должен меняться при изменении σ , что в ряде случаев может оказаться неудобным.

Посмотрим, насколько увеличится вероятность неправильного воспроизведения сигнала, если области сигналов и, значит, режим приемника взять для случая $P(A_1) = P(A_2)$ или, что то же, для случая малого σ и не менять в случае, если $P(A_1) \neq P(A_2)$ и σ велико.

При $P(A_1) = P(A_2)$ или малом σ области приема в соответствии с (3.11) устанавливаются так, что приходящее колебание $X(t)$ попадет



Фиг. 4.1. Вероятность искажения для идеального приемника. Кривая 1 для $\frac{P(A_1)}{P(A_2)} = 1$; 2 — для $\frac{P(A_1)}{P(A_2)} = 10$ или $0,1$. α определяется формулой (4.4)

в область сигнала $A_1(t)$, если

$$\overline{[X(t) - A_1(t)]^2} < \overline{[X(t) - A_2(t)]^2}.$$

Если повторить рассуждения § 4.1 для этого случая, то получим:

$$P(A_2 \text{ вместо } A_1) = V(\alpha),$$

где α определяется формулой (4.4).

Совершенно аналогично

$$P(A_1 \text{ вместо } A_2) = V(\alpha),$$

откуда вероятность искажения в этом случае будет равна:

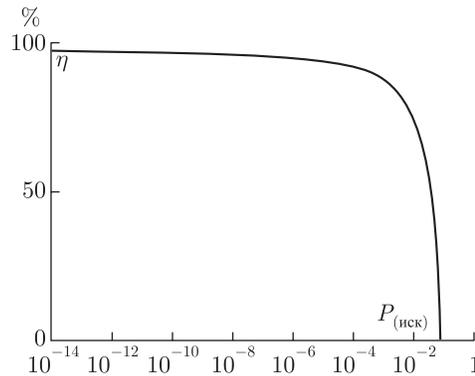
$$P_{(\text{иск.})} = P(A_1)P(A_2 \text{ вместо } A_1) + P(A_2)P(A_1 \text{ вместо } A_2) = V(\alpha), \quad (4.9)$$

поскольку $P(A_1) + P(A_2) = 1$.

Таким образом, эта вероятность не будет зависеть от отношения $P(A_1)/P(A_2)$ и будет равна вероятности искажения при приеме на идеальный приемник в случае $P(A_1)/P(A_2) = 1$.

Рассмотрим пример, когда $P(A_1)/P(A_2) = 10$ или 0,1. В этом случае вероятность искажений при приеме на идеальный приемник, созданный специально для этого случая, будет даваться кривой 2 фиг. 4.1. Вероятность же искажения при приеме на рассмотренный выше приемник, который не будет являться идеальным для данных условий, будет даваться кривой 1 этой же фигуры.

Как видно из этой фигуры, при малых α разница может быть весьма существенна, и в этом случае желательно учитывать неравенство вероятностей посылки сигнала. При работе в области с малым σ и, значит, большими α разница получается небольшой.



Фиг. 4.2. Зависимость коэффициента использования мощности от вероятности искажения для $\frac{P(A_1)}{P(A_2)} = 10$ или 0,1 при приемнике, являющимся идеальным

$$\text{для } \frac{P(A_1)}{P(A_2)} = 1$$

Для характеристики того, насколько данный приемник по своей помехоустойчивости близок к идеальному, введем понятие о коэффициенте использования мощности приемником, который будем обозначать через η . Под этим коэффициентом мы будем подразумевать отношение мощности сигналов при идеальном приемнике к мощности сигналов при некотором рассматриваемом приемнике, если в обоих случаях вероятность искажения и форма сигналов одни и те же. Таким образом, этот коэффициент будет показывать, насколько можно уменьшить энергию или мощность сигналов, если мы вместо данного приемника применим идеальный, сохраняя при этом ту же вероятность правильного воспроизведения.

Для только что рассмотренного случая этот коэффициент будет равен квадрату отношения абсцисс кривых 2 и 1 (фиг. 4.1) при одном и том же $P_{(иск.)}$. Полученная таким образом зависимость η от $P_{(иск.)}$ представлена на фиг. 4.2.

Как видим из этой фигуры, в условиях, когда $P_{(иск.)} < 10^{-3}$, а такие условия часты, приходится брать $\eta > 0,9$.

4.3. Потенциальная помехоустойчивость при передаче с пассивной паузой

В случае, если колебание сигнала может иметь только два значения $A_1(t)$ и $A_2(t)$, причем одно из них, скажем $A_2(t)$, тождественно равно нулю, то такую передачу мы назовем передачей с п а с с и в н о й п а у з о й; если ни один из этих сигналов не будет тождественно равен нулю, то передачей с а к т и в н о й п а у з о й.

Для передачи с пассивной паузой значение α , определяемое формулой (4.4) и характеризующее потенциальную помехоустойчивость, будет равно:

$$\alpha = \sqrt{\frac{TA_1^2(t)}{2\sigma^2}} = \sqrt{\frac{1}{2\sigma^2} \int_{-T/2}^{+T/2} A_1^2(t) dt}. \quad (4.10)$$

Обозначим удельную энергию сигнала через

$$Q_1 = T \overline{A_1^2(t)} = \int_{-T/2}^{+T/2} A_1^2(t) dt, \quad (4.11)$$

тогда

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{Q_1}{\sigma}. \quad (4.12)$$

Таким образом, в этом случае потенциальная помехоустойчивость будет определяться лишь энергией сигнала и не будет совершенно зависеть от его формы. Чем больше энергия сигнала, тем больше потенциальная

помехоустойчивость. Однако только на основании этого результата еще не следует, что применение каких-либо новых форм сигналов и усовершенствований приема не может повысить помехоустойчивость систем с пассивной паузой. Действительно, возможно, что в используемых в настоящее время системах помехоустойчивость много ниже полученной тут потенциальной. В этом случае, очевидно, что как усовершенствование приема, так и применение новых форм сигналов, которые облегчат это усовершенствование, может увеличить помехоустойчивость, доведя ее в лучшем случае до потенциальной.

Для выяснения этого вопроса рассмотрим в следующих параграфах в качестве примера одну из реально существующих систем с пассивной паузой и выясним, насколько ее помехоустойчивость близка к потенциальной.

4.4. Потенциальная помехоустойчивость при классическом телеграфном сигнале

В качестве примера передачи с пассивной паузой рассмотрим случай классического элементарного радиотелеграфного сигнала.

При таком сигнале мы будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} A_1(t) &= U_0 \cos \omega_0 t \text{ при } 0 \leq t \leq \tau_0, \\ A_1(t) &= 0 \text{ при } t < 0 \text{ или } t > \tau_0 \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

и

$$A_2(t) = 0. \quad (4.14)$$

Для определения потенциальной помехоустойчивости в этом случае можно взять α из выражения (4.12).

В этом выражении в соответствии с приложением А и с формулами (4.11) и (4.12) мы получим

$$Q_1^2 = \frac{1}{2} \int_0^{\tau_0} U_0^2 dt = \frac{1}{2} U_0^2 \tau_0. \quad (4.15)$$

Поэтому для данного вида передачи на основании (4.12)

$$\alpha = \frac{U_0 \sqrt{\tau_0}}{2\sigma}. \quad (4.16)$$

По величине α в соответствии с § 4.1 может быть определена вероятность искажения, характеризующая потенциальную помехоустойчивость при данном сигнале.

4.5. Помехоустойчивость при классическом телеграфном сигнале и приеме с синхронным детектором

Пусть для приема сигналов, рассмотренных в предыдущем параграфе, применяется реальный приемник, в котором сигналы вначале

проходят через фильтр с полосой пропускания от $\frac{\omega_0 - \Omega}{2\pi}$ до $\frac{\omega_0 + \Omega}{2\pi}$ и затем поступают на синхронный детектор. Полученное после детектора колебание поступает на выходное устройство, которое воспроизводит сообщение, соответствующее первому сигналу, если в момент $\frac{\tau_0}{2}$ поданное на него напряжение будет больше некоторой величины U_n , и второму сигналу в противном случае. Такой процесс будет происходить, например, при подаче выпрямленного напряжения на телеграфный аппарат, работающий с отсечкой по времени. Считая фильтр идеальным, мы на его выходе будем иметь напряжение от сигнала

$$u_c = \frac{U_0}{\pi} [\text{Si } \Omega t - \text{Si } \Omega(t - \tau_0)] \cos \omega_0 t, \quad (4.17)$$

как это можно получить при помощи интеграла Фурье, если не учитывать запаздывания в фильтре.

В этой формуле Si обозначает интегральный синус, который равняется:

$$\text{Si } x = \int_0^x \frac{\sin z}{z} dz. \quad (4.18)$$

Напряжение помехи после фильтра будет, очевидно, состоять из колебаний с частотами от $\frac{\omega_0 - \Omega}{2}$ до $\frac{\omega_0 + \Omega}{2}$ и иметь в этом диапазоне постоянную интенсивность σ . В соответствии с формулой (В.6) приложения В это колебание может быть записано так:

$$W_{\mu, \nu}(t) = \sqrt{2} W''_{1, n}(t) \cos \omega_0 t + \sqrt{2} W'_{1, n}(t) \sin \omega_0 t,$$

где $W'_{1, n}(t)$ и $W''_{1, n}(t)$ — независимые нормальные флюктуационные колебания, составляющие которых имеют частоты от 0 до $\frac{n}{T} = \frac{\Omega}{2\pi}$ и постоянную интенсивность в этом диапазоне, равную σ .

Таким образом, суммарное напряжение после фильтра при послыске сигнала $A_1(t)$ будет:

$$u'_\phi = u_c + W_{\mu, \nu}(t) = \left\{ \frac{U_0}{\pi} [\text{Si } \Omega t - \text{Si } \Omega(t - \tau_0)] + \sqrt{2} W''_{1, n}(t) \right\} \cos \omega_0 t + \sqrt{2} W'_{1, n}(t) \sin \omega_0 t. \quad (4.19)$$

Синхронный детектор, как известно, дает на выходе напряжение, пропорциональное амплитуде составляющей колебания, совпадающей по фазе с колебанием приходящего сигнала, и не реагирует на составляющую колебания, имеющую сдвиг фаз в 90° по отношению к ней.

Как мы условились, выходное устройство будет воспроизводить сообщение сигнала $A_1(t)$ или $A_2(t)$ в зависимости от значения напря-

жения на выходе детектора в момент времени $t = \tau_0/2$. Обозначив это значение через U_∂ , мы получим при посылке сигнала $A_1(t)$:

$$U'_\partial = \frac{U_0}{\pi} 2 \operatorname{Si} \frac{\Omega \tau_0}{2} + \sqrt{2} W''_{1,n} \left(\frac{\tau_0}{2} \right) \quad (4.20)$$

и при посылке сигнала $A_2(t)$, т. е. когда никакого колебания посылаться не будет:

$$U''_\partial = \sqrt{2} W''_{1,n} \left(\frac{\tau_0}{2} \right). \quad (4.21)$$

Значение $W''_{1,n} \left(\frac{\tau_0}{2} \right)$ является случайной величиной и может быть выражено в соответствии с формулой (B.2) приложения С так:

$$W''_{1,n} \left(\frac{\tau_0}{2} \right) = \sigma \sqrt{\frac{\Omega}{2\pi}} \theta, \quad (4.22)$$

где θ — нормальная случайная величина.

Примем, что выходное устройство будет воспроизводить сообщение, соответствующее первому сигналу, если

$$U_\partial > U_n = \frac{U_0}{\pi} \operatorname{Si} \frac{\Omega \tau_0}{2}, \quad (4.23)$$

т. е. если U_∂ будет больше половины выпрямленного напряжения от сигнала в этот момент, и сообщение, соответствующее второму, в противном случае.

Найдем вероятность того, что вместо первого сообщения будет воспроизведено второе, т. е. вероятность того, что для U'_∂ неравенство (4.23) не будет удовлетворяться.

Эта вероятность будет:

$$P(A_2 \text{ вместо } A_1) = P(U'_\partial < U_n) = P(\theta < -\beta), \quad (4.24)$$

где обозначено:

$$\beta = \frac{U_0}{\sigma} \sqrt{\frac{1}{\pi \Omega}} \operatorname{Si} \Omega \frac{\tau_0}{2} \quad (4.25)$$

и, значит, в соответствии с формулой (2.48)

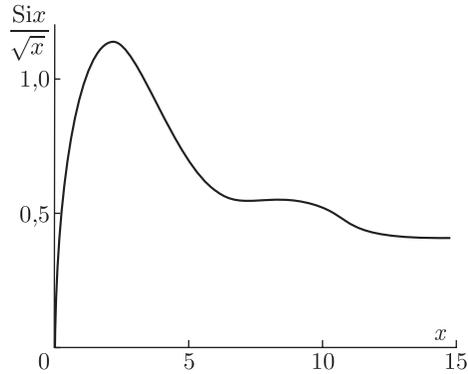
$$P(A_2 \text{ вместо } A_1) = V(\beta), \quad (4.26)$$

Аналогично

$$P(A_1 \text{ вместо } A_2) = P(U''_\partial > U_n) = P(\theta > \beta) > V(\beta). \quad (4.27)$$

Из выражений (4.26) и (4.27) следует, что для данного способа приема

$$P_{(\text{иск.})} = V(\beta). \quad (4.28)$$



Фиг. 4.3

Для получения минимального искажения нужно стараться, чтобы β было по возможности больше. Найдем зависимость β от полосы пропускания фильтра Ω/π . Для этого выражение (4.25) перепишем так:

$$\beta = \frac{U_0}{\sigma} \sqrt{\frac{\pi_0}{2\pi}} \frac{\text{Si } x}{\sqrt{x}}, \tag{4.29}$$

где

$$x = \frac{\Omega\tau_0}{2}.$$

Зависимость $\frac{\text{Si } x}{\sqrt{x}}$ от x изображена на фиг. 4.3. Как видно из фигуры, при $x = 2,1$ эта величина становится максимальной, принимая значение, равное 1,14. Отсюда при данном способе приема оптимальная ширина полосы фильтра будет:

$$\frac{\Omega}{\pi} = \frac{4,2}{\pi\tau_0} = \frac{1,34}{\tau_0} \tag{4.30}$$

и максимальное значение β при этой полосе будет равно:

$$\beta_{\text{макс}} = 0,455 \frac{U_0\sqrt{\tau_0}}{\sigma} = 0,91 \frac{Q_1}{\sqrt{2}\sigma}. \tag{4.31}$$

В рассматриваемом в этом параграфе случае вероятность искажения определяется β так же, как в случае идеального приема она определялась α , в соответствии с (4.8). Из сравнения (4.31) и (4.16) мы видим, что $\beta_{\text{макс}}$ несколько меньше α и, значит, даже при оптимальной полосе рассматриваемый способ приема будет давать несколько бóльшие искажения, чем имелись при идеальном приемнике.

Найдем величину коэффициента использования мощности η , введенного в § 4.2, при рассмотренном способе приема.

Очевидно, этот коэффициент в данном случае при оптимальной полосе будет равен величине

$$\left(\frac{\beta_{\max}}{\alpha}\right)^2 = 0,83. \quad (4.32)$$

Таким образом, энергия сигнала может быть при идеальном приеме уменьшена в 0,83 раза при сохранении той же вероятности искажения. Из сказанного следует, что рассмотренный способ приема по помехоустойчивости весьма близок к идеальному.

4.6. Помехоустойчивость при классическом телеграфном сигнале и приеме с обычным детектором

Рассмотрим теперь вероятность искажения в случае, когда в приемнике, разобранным в предыдущем параграфе, вместо синхронного детектора применяется обычный. В этом случае выпрямленное напряжение будет зависеть от амплитуды суммарного колебания, состоящего из сигнала и помехи на выходе фильтра.

Пусть приемник воспроизводит первое сообщение, если эта амплитуда на выходе фильтра U_{ϕ} будет в момент времени $\frac{\tau_0}{2}$ больше половины амплитуды от сигнала, т. е.

$$U_{\phi} > \frac{U_0}{\pi} \text{Si} \frac{\Omega\tau_0}{2} = U_n, \quad (4.33)$$

и воспроизводит второе сообщение, если это неравенство не удовлетворяется.

Райс³⁾ высчитал вероятность того, что суммарная амплитуда синусоидального сигнала и флюктуационной помехи будет меньше некоторой величины. Воспользовавшись его результатами, которые даны им в виде кривых, можно вычислить значение вероятности того, что суммарная амплитуда сигнала и помехи в момент времени $\frac{\tau_0}{2}$ окажется меньше U_n , т. е. произойдет искажение. Назовем эту вероятность $P(A_2$ вместо $A_1)$. Затем можно найти вероятность того, что амплитуда помехи в отсутствие колебания сигнала превзойдет величину U_n , т. е. сигнал $A_2(t)$ будет воспринят как сигнал $A_1(t)$. Эта вероятность была определена многими авторами и в том числе Райсом. Она равна:

$$P(A_1 \text{ вместо } A_2) = e^{-\frac{U_n^2}{2H^2}}, \quad (4.34)$$

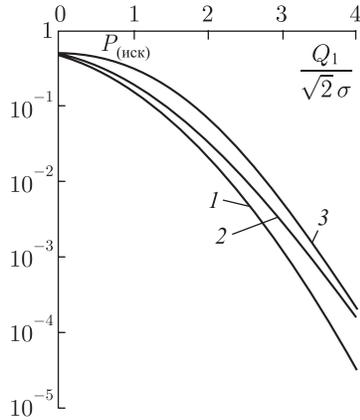
где H — эффективное значение помехи, равное в соответствии с (2.57) в нашем случае величине $\sigma\sqrt{\frac{\Omega}{\pi}}$. Подставляя это значение и значение

³⁾ S. O. Rice, B. S. T. J., July, 1944.

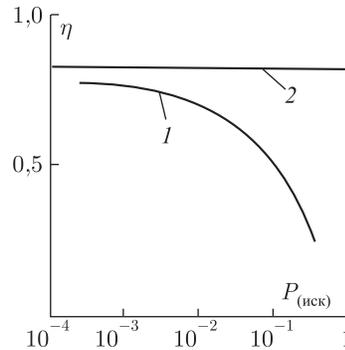
U_n в (4.34), получим:

$$P(A_1 \text{ вместо } A_2) = e^{-\frac{\beta^2}{2}}, \tag{4.35}$$

где β определяется выражением (4.25).



Фиг. 4.4. Вероятность искажения при сигнале с прямоугольной огибающей. Кривая 1 — идеальный приемник; 2 — синхронный приемник; 3 — обычный приемник; Q_1 определяется формулой (4.15)



Фиг. 4.5. Коэффициент использования мощности при сигнале с прямоугольной формой. Кривая 1 — обычный приемник; прямая 2 — синхронный приемник

Если принять, что посылка сигналов $A_1(t)$ и $A_2(t)$ равновероятна, то вероятность искажения будет равна:

$$P_{(иск.)} = 0,5P(A_1 \text{ вместо } A_2) + 0,5P(A_2 \text{ вместо } A_1).$$

Эта вероятность для оптимальной полосы, которая в данном случае будет также определяться уравнением (4.30), изображается кривой 3 на фиг. 4.4. Там же для сравнения кривая 2 изображает вероятность искажения для случая приема с синхронным детектором и кривая 1 — для случая идеального приемника.

По оси абсцисс во всех случаях отложена величина $\frac{Q_1}{\sqrt{2}\sigma}$, где Q_1^2 — удельная энергия, даваемая формулой (4.15).

Кривая 1 на фиг. 4.5 дает коэффициент использования мощности при приеме, разобранный в этом параграфе, в зависимости от $P_{(иск.)}$. В данном случае он будет равен квадрату отношения абсцисс кривых 1 и 3 на фиг. 4.4, взятых при данном $P_{(иск.)}$. На этой фигуре прямая 2 дает для сравнения величину коэффициента использования мощности при приеме с синхронным детектором, которая равна 0,83.

4.7. Выводы относительно помехоустойчивости систем с пассивной паузой

Как было показано, потенциальная помехоустойчивость при этом способе передачи при постоянной заданной интенсивности помехи определяется целиком величиной

$$Q_1^2 = T \overline{A_1^2(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} A_1^2(t) dt,$$

т. е. энергией сигнала. Форма сигнала на потенциальную помехоустойчивость не влияет.

При классическом способе передачи и приемниках с оптимальной полосой, которые мы рассмотрели в § 4.5 и 4.6, мы получаем помехоустойчивость, весьма близкую к потенциальной, причем несколько большую при синхронном детекторе, чем при обычном.

Отсюда следует, что применение отличных от рассмотренных в § 4.5 и 4.6 методов приема существенного увеличения помехоустойчивости при сохранении энергии сигнала дать не может. Данное положение справедливо при условии, если форма, величина и возможное время прихода сигнала известны, а помеха нормально флюктуационного типа.

Из этого, однако, не следует делать вывода, что всегда следует при телеграфии с пассивной паузой применять разобранный здесь способ передачи и приема. В ряде случаев может оказаться, что другие способы передачи и приема будут более целесообразны, например вследствие меньшего влияния на них замираний, импульсных помех и т. п.

4.8. Оптимальная система передачи с активной паузой

В этом и следующих параграфах мы рассмотрим потенциальную помехоустойчивость систем, в которых сигналы могут принимать два значения $A_1(t)$ и $A_2(t)$, причем оба эти значения тождественно не равны нулю.

Вначале постараемся найти оптимальную систему, которая обеспечивала бы максимально возможную потенциальную помехоустойчивость при заданной максимальной энергии сигнала Q^2 .

Для этого, очевидно, надо выбрать такие сигналы, чтобы величина, определяющая потенциальную помехоустойчивость:

$$\alpha^2 = \frac{1}{2\sigma^2} \int_{-T/2}^{+T/2} [A_1(t) - A_2(t)]^2 dt = \frac{1}{2\sigma^2} T \overline{[A_1(t) - A_2(t)]^2}, \quad (4.36)$$

была максимальной при условии, что

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{+T/2} A_1^2(t) dt = T \overline{A_1^2(t)} \leq Q^2, \\ \int_{-T/2}^{+T/2} A_2^2(t) dt = T \overline{A_2^2(t)} \leq Q^2. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Мы имеем:

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{+T/2} [A_1(t) - A_2(t)]^2 dt = 2 \int_{-T/2}^{+T/2} A_1^2(t) dt + \\ + 2 \int_{-T/2}^{+T/2} A_2^2(t) dt - \int_{-T/2}^{+T/2} [A_1(t) + A_2(t)]^2 dt. \end{aligned}$$

Для получения максимума этого выражения нужно сделать два первых интеграла возможно большими, а последний интеграл возможно меньшим. Максимальное значение первых интегралов получится при выполнении условия (4.37), если положить:

$$\int_{-T/2}^{+T/2} A_1^2(t) dt = \int_{-T/2}^{+T/2} A_2^2(t) dt = Q^2. \quad (4.38)$$

Третий интеграл не может принимать отрицательных значений. Поэтому его минимально возможное значение будет равно нулю при условии

$$A_1(t) = -A_2(t). \quad (4.39)$$

Это условие не противоречит условию (4.38).

Таким образом, α и, значит, потенциальная помехоустойчивость будут максимальны, если $A_1(t)$ и $A_2(t)$ равны между собой по абсолютной величине, противоположны по знаку и имеют максимально возможную удельную энергию. Форма этих сигналов на потенциальную помехоустойчивость не влияет и может быть любой.

При разобранном оптимальном варианте величина α , определяющая потенциальную помехоустойчивость, очевидно, будет равна:

$$\alpha = \sqrt{\frac{2}{\sigma^2} \int_{-T/2}^{+T/2} A_1^2(t) dt} = \frac{\sqrt{2} Q}{\sigma}. \quad (4.40)$$

Полученное значение будет определять максимально возможную потенциальную помехоустойчивость, которая может быть получена при работе с активной паузой и вообще при любой системе работы с двумя дискретными сигналами, если максимальная энергия сигнала задана.

Сравнивая полученное значение α со значением α для работы с пассивной паузой, которое дается выражением (4.12), мы видим, что при оптимальном варианте при сохранении той же α и, значит, той же вероятности искажения можно удельную энергию сигнала Q^2 уменьшить в 4 раза.

Если в качестве сигнала $A_1(t)$ для оптимальной системы взять сигнал, даваемый формулой (4.13), и приемник осуществить по схеме: фильтр с оптимальной полосой, определяемой формулой (4.30); синхронный детектор; выходное устройство, воспроизводящее первый сигнал, если напряжение на нем в момент $\frac{\tau_0}{2}$ будет положительно, и второй, если оно будет отрицательно, то коэффициент использования мощности на приеме будет равен:

$$\eta = 0,83,$$

как и в случае, разобранным в § 4.5. В этом нетрудно убедиться, повторив рассуждения § 4.5 для данного случая. Как видим, при таком методе приема помехоустойчивость будет близка к потенциальной.

4.9. Помехоустойчивость при частотной манипуляции

Под передачей с частотной манипуляцией мы будем подразумевать передачу, состоящую из сигналов:

$$\begin{aligned} A_1(t) &= U_0 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \text{ при } 0 < t < \tau_0, \\ A_1(t) &= 0 \text{ при } t < 0 \text{ или } t > \tau_0, \\ A_2(t) &= U_0 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \text{ при } 0 < t < \tau_0, \\ A_2(t) &= 0 \text{ при } t < 0 \text{ или } t > \tau_0. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Для этой системы передачи

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{1}{2\sigma^2} \int_{-T/2}^{+T/2} [A_1(t) - A_2(t)]^2 dt = \\ &= \frac{U_0^2}{2\sigma^2} \int_0^{\tau_0} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \cos(2\omega_1 t + 2\varphi_1) + \frac{1}{2} \cos(2\omega_2 t + 2\varphi_2) - \right. \\ &\quad \left. - \cos[(\omega_1 + \omega_2)t + \varphi_1 + \varphi_2] - \cos[(\omega_1 - \omega_2)t + \varphi_1 - \varphi_2] \right\} dt. \end{aligned}$$

При раскрытии этого интеграла второе, третье и четвертое слагаемые, стоящие в фигурных скобках, дадут величины, стремящиеся к нулю при увеличении ω_1 и ω_2 . Мы этими слагаемыми пренебрежем,

считая ω_1 и ω_2 достаточно большими. Тогда после интегрирования и некоторого преобразования получим:

$$\alpha^2 = \frac{Q^2}{\sigma^2} \left\{ 1 - \frac{\sin[(\omega_1 - \omega_2)\tau_0 + \varphi_1 - \varphi_2] - \sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{(\omega_1 - \omega_2)\tau_0} \right\}, \quad (4.42)$$

где

$$Q^2 = \frac{U_0^2 \tau_0}{2} \quad (4.43)$$

— удельная энергия сигналов.

Полученное значение α зависит от разности начальных фаз $\varphi_1 - \varphi_2$.

Если манипуляция частотой производится путем изменения параметров контура автогенератора, $\varphi_1 = \varphi_2$, и выражение упрощается. В этом случае получим:

$$\alpha^2 = \frac{Q^2}{\sigma^2} \left\{ 1 - \frac{\sin(\omega_1 - \omega_2)\tau_0}{(\omega_1 - \omega_2)\tau_0} \right\}. \quad (4.44)$$

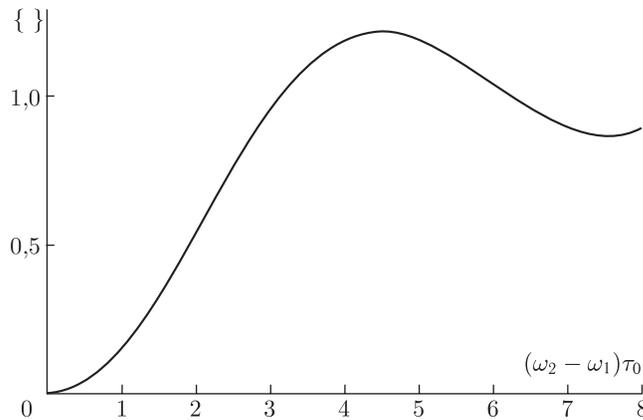
Зависимость фигурной скобки, входящей в это выражение, от $(\omega_1 - \omega_2)\tau_0$ дана на фиг. 4.6.

Исследуя эту фигуру, можно прийти к следующим выводам:

1. При данном способе манипуляции максимальная потенциальная помехоустойчивость получится при разности частот:

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi} = 0,7 \frac{1}{\tau_0}. \quad (4.45)$$

При меньших разностях потенциальная помехоустойчивость будет уменьшаться. Это положение позволяет определить минимальную разность частот, меньше которой, во избежание потери помехоустойчивости, брать не следует.



Фиг. 4.6. Фигурная скобка выражения (4.44)

2. При данном способе манипуляции и при оптимальной разности частот $\omega_1 - \omega_2$ значение $\alpha^2 = 1, 2 \frac{Q^2}{\sigma^2}$, т. е. в 2,4 раза больше, чем значение, получаемое при передаче с пассивной паузой, если в обоих случаях брать одинаковые удельные энергии сигналов Q^2 . Таким образом, потенциальная помехоустойчивость при частотной манипуляции не на очень много больше потенциальной помехоустойчивости, получаемой при работе с пассивной паузой, разобранный в §4.4. Если принять далее во внимание, что согласно §4.5 и 4.6 в последнем случае можно весьма близко приблизиться к потенциальной помехоустойчивости, то мы приходим к выводу, что при частотной манипуляции в случае неискаженных сигналов и нормально флуктуационных помех получить значительно большую помехоустойчивость, чем при классической амплитудной манипуляции, нельзя.

Выигрыш по помехоустойчивости, который наблюдается при замене амплитудной манипуляции на частотную, на коротких волнах, очевидно, следует отнести за счет искажения сигнала замираниями.

4.10. Потенциальная помехоустойчивость при нормально флуктуационной помехе с интенсивностью, зависящей от частоты

До настоящего параграфа мы рассматривали нормально флуктуационные помехи, состоящие из большого числа весьма коротких импульсов, имеющих постоянную интенсивность. В приложении D показано, что помеха, состоящая из импульсов произвольной формы, может быть записана, если учесть составляющие с частотами от $\frac{\mu}{T}$ до $\frac{\nu}{T}$:

$$W_{\mu, \nu}^*(t) = \sum_{i=\mu}^{\nu} \left[\frac{\sigma^* \left(\frac{i}{T} \right)}{\sqrt{T}} (\theta_{2i-1}^* \sin \frac{2\pi}{T} it + \theta_{2i}^* \cos \frac{2\pi}{T} it) \right], \quad (4.46)$$

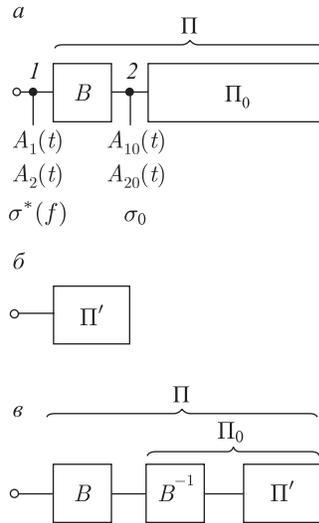
где θ^* — взаимно независимые нормальные случайные величины. Это выражение отличается от (2.54) тем, что тут амплитуда составляющих помехи зависит от их частоты. Выясним, как можно случай с помехой (4.46) свести к рассмотренному ранее.

Пусть приходящий сигнал может иметь опять два значения $A_1(t)$ и $A_2(t)$. Пусть на этот сигнал накладывается помеха $W_{\mu, \nu}^*(t)$ с интенсивностью $\sigma^*(f)$, меняющейся с частотой. Возьмем приемник Π , собранный по схеме, приведенной на фиг. 4.7, а. На этой схеме через B обозначен выравнитель — линейное устройство, коэффициент усиления которого равен:

$$k(f) = \frac{k_0}{\sigma^*(f)}, \quad (4.47)$$

где k_0 — некоторая постоянная.

Фазовая характеристика этого выравнителя может быть любой.



Фиг. 4.7. Π_0 — идеальный приемник для сигналов $A_{10}(t)$ и $A_{20}(t)$ и помехи с постоянной интенсивностью σ_0 ; Π — идеальный приемник для сигналов $A_1(t)$ и $A_2(t)$ и помехи с интенсивностью $\sigma^*(f)$; B — четырехполюсник с коэффициентом передачи $|K| = \frac{\sigma_0}{\sigma^*(f)}$; B' — четырехполюсник с коэффициентом передачи $K' = K^{-1}$

Проходя через этот выравниватель, помеха будет искажаться. Вместо помехи $W_{\mu,\nu}^*(t)$ с интенсивностью $\sigma^*(f)$, действующей в точке 1, мы в точке 2 получим помеху $W_{\mu,\nu}(t)$, которая в соответствии с приложением D будет также нормально флюктуационным колебанием, но с интенсивностью

$$\sigma_0 = \sigma^*(f)k(f) = k_0,$$

которая будет постоянной. Сигналы, проходя через выравниватель, будут менять свою форму. Пусть в точке 2 они примут вид $A_{10}(t)$ и $A_{20}(t)$.

Очевидно, приемник Π будет давать ошибку тогда, и только тогда, когда будет давать ошибку приемник Π_0 . Таким образом, вероятность искажения в приемнике Π при сигналах $A_1(t)$, $A_2(t)$ и помехе с интенсивностью $\sigma^*(f)$ будет равна вероятности искажения в приемнике Π_0 при сигналах $A_{10}(t)$, $A_{20}(t)$ и помехе с интенсивностью σ_0 . Для того чтобы приемник Π давал наименьшую вероятность искажений, нужно, очевидно, взять приемник Π_0 идеальным в смысле § 3.2.

Полученный таким образом приемник Π будет идеальным для приема сигналов $A_1(t)$ и $A_2(t)$ при помехе с интенсивностью $\sigma^*(t)$. Действительно, он будет давать наименьшую вероятность искажений, возможную для приемников, составленных по схеме фиг. 4.7, а, а по этой схеме можно осуществить приемник, эквивалентный по

искажениям любому другому. В самом деле, любой приемник Π' (фиг. 4.7, б) эквивалентен приемнику, показанному на фиг. 4.7, в, где через B^{-1} обозначен линейный четырехполюсник, обратный четырехполюснику B . Приемник же по схеме фиг. 4.7, в приводится к схеме фиг. 4.7, а.

Вероятность искажения при полученном идеальном приемнике будет характеризовать потенциальную помехоустойчивость.

Очевидно, эта вероятность будет равна вероятности искажения в идеальном приемнике при сигналах $A_{10}(t)$, $A_{20}(t)$ и помехе с интенсивностью σ_0 , не зависящей от частоты. Последняя вероятность может быть определена по формулам § 4.1, если в них вместо $A_1(t)$, $A_2(t)$ и σ^* подставить $A_{10}(t)$, $A_{20}(t)$ и σ_0 соответственно.

В этом параграфе мы рассмотрели способ учета непостоянства интенсивности помехи для случая двух дискретных сигналов. Этот способ приводит к цели также и во всех других случаях, которые рассмотрены ниже. Поэтому мы к данному вопросу возвращаться в дальнейшем не будем.

4.11. Геометрическое толкование материала гл. 4

В случае двух дискретных сигналов области идеального приемника, соответствующие этим сигналам, будут определяться неравенством (4.1). Если вместо этого неравенства взять равенство, то точки, соответствующие колебаниям $X(t)$, определяемым из этого равенства, будут составлять плоскость. Эта плоскость перпендикулярна линии, соединяющей точки сигналов $A_1(t)$ и $A_2(t)$, будет граничной плоскостью. Она разделяет области сигналов $A_1(t)$ и $A_2(t)$. В случае, если сигналы будут равновероятны, плоскость будет проходить в середине между точками $A_1(t)$ и $A_2(t)$. Искажение будет происходить в том случае, если вектор помехи, прикладываясь к радиусу-вектору посланного сигнала, создаст результирующий вектор, конец которого окажется по другую сторону граничной плоскости. Поскольку для вектора помехи все направления равновероятны, то естественно, что искажения будут зависеть лишь от расстояния граничной плоскости от точки сигнала и, значит, от расстояния между точками сигналов, т. е. от величины $\overline{[A_1(t) - A_2(t)]^2}$, как это и было доказано.

В случае передачи с пассивной паузой радиус-вектор одного из сигналов равен нулю. В этом случае потенциальная помехоустойчивость будет зависеть лишь от величины $\overline{A_1^2(t)}$, которая определяет расстояние между концом радиуса-вектора сигнала $A_1(t)$ и началом координат.

При отыскании оптимальной системы передачи (§ 4.8) мы ставили перед собой задачу найти систему из двух таких сигналов, радиусы-векторы которых не должны по длине превосходить заданную величину, причем расстояние между концами этих векторов должно быть максимальным. Естественно, что мы получим такую систему,

если возьмем радиусы-векторы максимальной возможной длины и направим их в противоположные стороны, т. е. сделаем один из векторов равным другому с обратным знаком.

Глава 5

ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ СИГНАЛАХ СО МНОГИМИ ДИСКРЕТНЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ

5.1. Решение задачи в общем виде

В предыдущей главе мы рассмотрели помехоустойчивость в случае, когда сигнал мог принимать только два значения.

В этой главе мы займемся аналогичным вопросом, но для более общего случая, когда сообщения и, значит, сигналы могут иметь m дискретных значений. Пусть эти значения сигналов будут:

$$A_1(t), A_2(t), \dots, A_m(t). \quad (5.1)$$

Найдем вероятность искажения при приеме таких сигналов на идеальный приемник, рассмотренный в гл. 3. Эта вероятность, очевидно, будет характеризовать потенциальную помехоустойчивость.

Пусть передавался сигнал $A_1(t)$, тогда действующее на приемник колебание будет:

$$X(t) = W_{\mu, \nu}(t) + A_1(t). \quad (5.2)$$

Очевидно идеальный приемник при этом воспроизведет сообщение, соответствующее передававшемуся сигналу $A_1(t)$, если в соответствии с § 3.2 мы будем иметь:

$$T[\overline{X(t) - A_1(t)}]^2 - \sigma^2 \ln P(A_1) \leq T[\overline{X(t) - A_j(t)}]^2 - \sigma^2 \ln P(A_j) \quad (5.3)$$

для всех $j = 2, \dots, m$.

Если хотя бы одно из неравенств (5.3) не будет удовлетворяться, произойдет искажение.

Подставляя в уравнение (5.3) значение $X(t)$ из (5.2), мы после преобразования получим:

$$2T\overline{W_{\mu, \nu}(t)[A_j(t) - A_1(t)]} \leq T[\overline{A_j(t) - A_1(t)}]^2 + \sigma^2 \ln \frac{P(A_1)}{P(A_j)}. \quad (5.4)$$

Вероятность выполнения системы этих неравенств равна вероятности правильного приема сигнала $A_1(t)$ на идеальный приемник. Аналогичные выражения будем иметь и для других сигналов. В общем случае величина этой вероятности выражается интегралами, которые не берутся.

Поэтому в дальнейшем будут рассмотрены лишь наиболее интересные частные случаи.

5.2. Потенциальная помехоустойчивость при ортогональных равновероятных сигналах, имеющих одинаковую энергию

Рассмотрим случай, когда

$$\left. \begin{aligned} &T\overline{A_i^2(t)} = 0, \\ &\overline{A_i(t)A_j(t)} = 0 \\ \text{и} \\ &P(A_i) = \frac{1}{m}, \\ \text{где} \\ &i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, m, \\ \text{но} \\ &j \neq i. \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

В этом случае неравенство (5.4) на основании (2.60) и (2.61) легко приводится к виду:

$$\sigma\sqrt{2T}\sqrt{\overline{A_j^2(t)}}\theta_k - \sigma\sqrt{2T}\sqrt{\overline{A_1^2(t)}}\theta_1 \leq T[\overline{A_j^2(t)} + \overline{A_1^2(t)}]$$

или

$$\theta_j - \theta_1 \leq \frac{\sqrt{2}Q}{\sigma} \quad (5.6)$$

для

$$j = 2, 3, \dots, m,$$

где θ_j — взаимно независимые нормальные случайные величины.

Пусть θ_1 удовлетворяет условию

$$y < \theta_1 < y + dy. \quad (5.7)$$

Вероятность этого в соответствии с (2.34) будет равна:

$$\frac{dy}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}. \quad (5.8)$$

В этом случае, для того чтобы j -тое неравенство (5.6) выполнялось, должно быть:

$$\theta_j \leq \frac{\sqrt{2}Q}{\sigma} + y. \quad (5.9)$$

Согласно (2.48) вероятность этого будет равна:

$$1 - V\left(\frac{\sqrt{2}Q}{\sigma} + y\right). \quad (5.10)$$

Поскольку все θ_j независимы, вероятность одновременного выполнения всех $m - 1$ неравенств (5.6) и неравенства (5.7) будет:

$$\frac{dy}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \left[1 - V\left(\frac{\sqrt{2}Q}{\sigma} + y\right)\right]^{m-1}. \quad (5.11)$$

Отсюда следует, что вероятность выполнения всех неравенств (5.6) при любом θ_1 будет:

$$P(A_{1\text{прав.}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[1 - V\left(\frac{\sqrt{2}Q}{\sigma} + y\right) \right]^{m-1} e^{-\frac{y^2}{2}} dy. \quad (5.12)$$

Эта вероятность будет равна вероятности того, что посланный сигнал $A_1(t)$ будет принят правильно идеальным приемником. В рассматриваемом случае эта вероятность будет одинаковой для всех сигналов и будет характеризовать потенциальную помехоустойчивость.

5.3. Пример телеграфной передачи с 32 ортогональными сигналами

На основании теории, изложенной в предыдущем параграфе, подсчитаем потенциальную помехоустойчивость для случая, когда в телеграфной передаче сигналы, характеризующие отдельные буквы, имеют одинаковую энергию Q^2 и ортогональны между собой.

Это может быть случай, когда буква передается синусоидальным колебанием, причем амплитуда этого колебания U_0 и его продолжительность τ_0 для всех букв одинаковы, а частота для каждой буквы имеет свое значение. При этих условиях колебание, соответствующее k -той букве, будет равно:

$$\begin{aligned} A_k(t) &= U_0 \cos(\omega_k t + \varphi) && \text{при } 0 \leq t \leq \tau_0, \\ A_k(t) &= 0 && \text{при } t < 0 \text{ или } t > \tau_0. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Скалярное произведение колебания $A_k(t)$ на колебание $A_i(t)$, соответствующее i -той букве, будет равно:

$$\begin{aligned} \overline{A_k(t)A_i(t)} &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} A_k(t)A_i(t)dt = \\ &= \frac{U_0^2}{2T} \left[\frac{\sin(\omega_k - \omega_i)\tau_0}{\omega_k - \omega_i} + \frac{\sin[(\omega_k + \omega_i)\tau_0 + 2\varphi] - \sin 2\varphi}{\omega_k + \omega_i} \right]. \end{aligned} \quad (5.14)$$

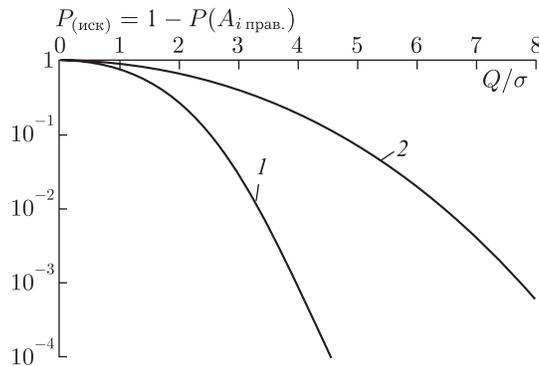
Если предположить, что $\frac{(\omega_k - \omega_i)\tau_0}{2\pi}$ и $\frac{(\omega_k + \omega_i)\tau_0}{2\pi}$ — целые числа, то колебания $A_k(t)$ и $A_i(t)$ будут ортогональны, поскольку выражение (5.14) при этом будет равно нулю. Очевидно, что эти колебания можно также считать ортогональными, если $\frac{(\omega_k - \omega_i)\tau_0}{2\pi}$ — целое число и $\omega_k + \omega_i \gg |\omega_k - \omega_i|$.

Таким образом, если частоты сигналов будут отстоять друг от друга на величины, кратные $\frac{1}{\tau_0}$, и их суммы будут много больше их разностей, сигналы будут ортогональны.

Сигналы также будут ортогональны, если отдельные буквы будут передаваться любыми колебаниями, не перекрывающимися друг другом, так как в этом случае, очевидно,

$$\overline{A_i(t)A_k(t)} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} A_i(t)A_k(t)dt = 0, \quad (5.15)$$

поскольку для любого t хотя бы один из множителей, стоящий под интегралом, всегда будет равен нулю.



Фиг. 5.1. Вероятность искажения при 32 сигналах с одинаковой априорной вероятностью и идеальном приемнике. Кривая 1 — при передаче ортогональными сигналами; 2 — при передаче пятью двухзначными импульсами.

Примем дальше, что вероятности посылки каждого из сигналов одинаковы и что $m = 32$, тогда численным интегрированием по формуле (5.12) мы получим результат, изображенный кривой 1 на фиг. 5.1, где по оси абсцисс отложена величина Q/σ , а по оси ординат — вероятность $P_{(иск.)} = 1 - P(A_{i_прав.})$.

Полученную вероятность искажения мы сравним в дальнейшем с вероятностью для других способов передачи.

5.4. Потенциальная помехоустойчивость при составных сигналах

Очень часто сложные сигналы составляются из более простых, следующих один за другим. Так, например, в телеграфии почти всегда сигналы букв и знаков составляются из отдельных элементарных сигналов, следующих друг за другом и имеющих одинаковую длину и два значения.

Найдем потенциальную помехоустойчивость при таких сигналах. Начнем с общего случая.

Пусть первый простой сигнал, входящий в сложный, может иметь одно из следующих значений:

$$B_1(t), B_1(t), \dots, B_m(t). \quad (5.16)$$

Пусть второй простой сигнал будет начинаться через время τ после начала первого. Тогда он, очевидно, будет иметь одно из следующих значений:

$$B_1(t - \tau), B_2(t - \tau), \dots, B_m(t - \tau). \quad (5.17)$$

Наконец, l -тый простой сигнал будет иметь одно из следующих значений:

$$B_1(t - l\tau + \tau), B_2(t - l\tau + \tau), \dots, B_m(t - l\tau + \tau). \quad (5.18)$$

Если сложный сигнал будет состоять из n простых, то, очевидно, он будет иметь следующий вид:

$$B_{k_1}(t) + B_{k_2}(t - \tau) + \dots + B_{k_n}(t - n\tau + \tau), \quad (5.19)$$

где k_1, \dots, k_n — некоторые целые числа, могущие принимать значения от 1 до m в зависимости от того, какой сложный сигнал передается. В рассматриваемом случае сложный сигнал может иметь m^n значений.

Мы будем считать, что отдельные простые сигналы, следующие один за другим, не перекрываются между собой. При этих условиях сигналы

$$B_i(t - k\tau) \text{ и } B_j(t - l\tau)$$

будут ортогональны при любых i и j , если $k \neq l$, как это было показано в предыдущем параграфе.

Найдем вероятность искажения рассмотренного здесь сложного сигнала при приеме его на идеальный приемник.

Очевидно, для того чтобы рассмотренный сложный сигнал был принят без искажения идеальным приемником, необходимо и достаточно, чтобы все простые сигналы, входящие в него, были бы приняты этим приемником без искажения. Докажем, что при принятых условиях и при приеме на идеальный приемник искажения отдельных простых сигналов являются независимыми событиями.

Действительно, в соответствии с § 5.1, если l -тый простой сигнал имел вид:

$$B_i(t - l\tau + \tau),$$

то он будет принят без искажения идеальным приемником при условии, что помеха будет иметь такие значения, что случайные величины

$$\overline{W_{\mu, \nu}(t)[B_j(t - l\tau + \tau) - B_i(t - l\tau + \tau)]} \quad (5.20)$$

при любых $j = 1, 2, \dots, m$ примут значения, удовлетворяющие неравенствам:

$$\begin{aligned} 2T\overline{W_{\mu,\nu}(t)[B_j(t-l\tau+\tau) - B_i(t-l\tau+\tau)]} < \\ < T\overline{[B_j(t-l\tau+\tau) - B_i(t-l\tau+\tau)]^2} + \sigma^2 \ln \frac{P(B_i)}{P(B_j)}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Далее, k -тый простой сигнал, который, допустим, имел значение

$$B_{i'}(t - k\tau + \tau),$$

будет принят без искажения, если случайные величины

$$\overline{W_{\mu,\nu}(t)[B_j(t - k\tau + \tau) - B_{i'}(t - k\tau + \tau)]} \quad (5.22)$$

примут значения, удовлетворяющие неравенствам:

$$\begin{aligned} 2T\overline{W_{\mu,\nu}(t)[B_j(t - k\tau + \tau) - B_{i'}(t - k\tau + \tau)]} < \\ < T\overline{[B_j(t - k\tau + \tau) - B_{i'}(t - k\tau + \tau)]^2} + \sigma^2 \ln \frac{P(B_{i'})}{P(B_j)}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Так как функции, стоящие в квадратных скобках выражений (5.20) и (5.22), ортогональны между собой, то эти выражения будут в соответствии с § 2.4 друг от друга независимыми случайными величинами и, значит, неравенства (5.21) и (5.23) будут выполняться также независимо друг от друга. Это доказывает высказанное положение о независимости искажения отдельных простых сигналов.

Вероятность правильного приема каждого простого сигнала может быть определена методами, изложенными раньше. Очевидно, в рассматриваемом случае эти вероятности будут одинаковы для всех простых сигналов (априорные вероятности для них считаем одинаковыми) и будут равны $P_{(\text{прав. прост.})}$.

Поскольку, как отмечалось, искажения отдельных простых сигналов независимы друг от друга, то, очевидно, вероятность того, что все n простых сигналов, образующих один сложный, будут приняты правильно, т. е. будет принят правильно сложный сигнал, примет вид:

$$1 - P_{(\text{иск.})} = P_{(\text{прав. прост.})}^n \quad (5.24)$$

5.5. Пример пятизначного кода

Применим теорию предыдущего параграфа для частотной телеграфии пятизначным кодом. При этой системе передачи сигнал, соответствующий одному знаку, будет состоять из пяти следующих один за другим простых сигналов, каждый из которых имеет вид, разобранный в § 4.9.

Будем считать, что вероятность обоих значений простого сигнала одинакова.

В этом случае

$$P_{(\text{иск. прост.})} = V(\alpha), \quad (5.25)$$

где α определяется формулой (4.44) и при разности частот, при которой фигурная скобка равна 1, будет:

$$\alpha^2 = \frac{Q_n^2}{\sigma^2}, \quad (5.26)$$

где Q_n^2 — энергия простого сигнала.

При этом способе передачи сигнал может иметь:

$$m^n = 2^5 = 32$$

варианта.

Сравним потенциальную помехоустойчивость при данных сигналах с помехоустойчивостью при ортогональных сигналах, тоже имеющих 32 варианта, которую мы исследовали в § 5.3. Для этого выразим Q_n^2 через удельную энергию для всего сигнала, обозначив ее через $Q^2 = 5Q_n^2$.

Получим:

$$\alpha^2 = 0, 2 \frac{Q^2}{\sigma^2}, \quad (5.27)$$

откуда вероятность искажения составного сигнала в соответствии с формулами (5.24) и (5.27) будет равна:

$$P_{\text{иск.}} = 1 - P_{\text{прав. прост.}}^n = 1 - \left[1 - V\left(\sqrt{0, 2} \frac{Q}{\sigma}\right) \right]^5. \quad (5.28)$$

Значение этой величины дается кривой 2 фиг. 5.1, где по оси абсцисс отложена величина $\frac{Q}{\sigma}$, а по оси ординат $P_{\text{иск.}}$.

Сравнивая эту кривую с кривой 1 этой же фигуры, дающей вероятность искажения для аналогичной системы с ортогональными сигналами, мы видим, что ортогональная система выгоднее. Для обеспечения той же вероятности искажения при ортогональной системе требуется энергия сигнала примерно в 3,5 раза меньше, чем при сложном сигнале. Зато полоса занимаемых частот при сложном сигнале будет примерно в 3 раза меньше, поскольку в этом случае вместо 32 частот нужно передавать только две частоты, а посылки на этих частотах должны быть лишь в 5 раз короче, чем при ортогональных сигналах.

5.6. Оптимальная система при сигналах со многими дискретными значениями

Найдем оптимальную систему, содержащую m сигналов, подобно тому, как в § 4.8 была найдена оптимальная система из двух сигналов.

Пусть имеется система равновероятных сигналов

$$A_1(t), A_2(t), \dots, A_m(t). \quad (5.29)$$

Покажем, как можно уменьшить среднюю энергию этих сигналов, не изменяя потенциальной помехоустойчивости. Потенциальная помехо-

устойчивость определяется вероятностью соблюдения неравенств (5.4), в которые входят разности сигналов. Таким образом, если ввести новые сигналы

$$A'_k(t) = A_k(t) + B(t), \quad (5.30)$$

то неравенства (5.4) не изменятся, и, значит, потенциальная помехоустойчивость для сигналов $A_k(t)$ и $A'_k(t)$ будет одинакова.

Геометрически это означает, что если все точки, соответствующие сигналам, переместить параллельно на одинаковую величину, то расстояния между ними и потенциальная помехоустойчивость, определяемая этими расстояниями, не изменятся.

Найдем, каково должно быть колебание $B(t)$, чтобы средняя энергия сигнала

$$Q_{\text{ср}}^2 = \frac{T \sum_{k=1}^m \overline{A_k'^2(t)}}{m} \quad (5.31)$$

была минимальной,

Пользуясь (5.30), получим:

$$Q_{\text{ср}}^2 = \frac{T}{m} \left\{ \sum_{k=1}^m \overline{A_k^2(t)} + 2 \overline{\left[\sum_{k=1}^m A_k(t) \right] B(t) + m \overline{B^2(t)}} \right\}, \quad (5.32)$$

Если менять $B(t)$ так, чтобы $\overline{B^2(t)}$ оставалась постоянной величиной, то первый и третий члены в фигурной скобке меняться не будут, и минимум наступит, когда $B(t)$ будет противоположно $\sum_{k=1}^m A_k(t)$, т. е.

$$B(t) = -\lambda \sum_{k=1}^m A_k(t),$$

где λ — некоторая положительная величина.

Подставляя это значение $B(t)$ в (5.32), получим:

$$Q_{\text{ср}}^2 = \frac{T}{m} \left\{ \sum_{k=1}^m \overline{A_k^2(t)} - (2\lambda - m\lambda^2) \overline{\left[\sum_{k=1}^m A_k(t) \right]^2} \right\}. \quad (5.33)$$

Т. к. выражения под чертой в этом равенстве всегда положительны, то $Q_{\text{ср}}^2$ будет минимально, когда $2\lambda - m\lambda^2$ максимально, т. е. при $\lambda = \frac{1}{m}$.

Таким образом, для того чтобы получить среднюю энергию сигналов $A'_k(t)$ минимальной, не изменяя помехоустойчивость, нужно взять

$$A'_i(t) = A_i(t) - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m A_k(t). \quad (5.34)$$

Из этого соотношения легко доказать, что

$$\sum_{k=1}^m A'_k(t) = 0. \quad (5.35)$$

Перейдем к исследованию системы m сигналов, которая при заданной потенциальной помехоустойчивости имеет минимальную среднюю энергию. Поскольку мы приняли, что все сигналы равновероятны, можно полагать, что такая система должна содержать равноправные равноудаленные друг от друга сигналы. Возьмем произвольную систему равноудаленных друг от друга сигналов:

$$B_1(t), B_2(t), \dots, B_m(t). \quad (5.36)$$

Для нее

$$T \overline{[B_i(t) - B_k(t)]^2} = \beta^2 \quad (5.37)$$

не зависит от i и k ($i \neq k$).

Выясним, до какой величины можно уменьшить энергию сигналов этой системы, не изменяя ее потенциальную помехоустойчивость.

Образует систему сигналов:

$$B'_i(t) = B_i(t) - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m B_k(t). \quad (5.38)$$

Эта система будет, как было показано, иметь ту же потенциальную помехоустойчивость, как и система сигналов $B_i(t)$.

Для этой системы энергия сигнала $B'_1(t)$ будет равна:

$$\begin{aligned} T \overline{B'^2_1(t)} &= \frac{T}{m^2} \overline{[(m-1)B_1(t) - B_2(t) - \dots - B_m(t)]^2} = \\ &= \frac{T}{m^2} [(m-1)^2 \overline{B^2_1(t)} + \overline{B^2_2(t)} + \dots + \overline{B^2_m(t)} - \\ &\quad - 2(m-1) \overline{B_1(t)B_2(t)} - 2(m-1) \overline{B_1(t)B_3(t)} - \dots \\ &\quad \dots - 2(m-1) \overline{B_1(t)B_m(t)} + \\ &\quad + 2 \overline{B_2(t)B_3(t)} + 2 \overline{B_2(t)B_4(t)} + \dots + 2 \overline{B_2(t)B_m(t)} + \\ &\quad + 2 \overline{B_3(t)B_4(t)} + \dots + 2 \overline{B_3(t)B_m(t)} + \\ &\quad \dots \dots \dots \\ &\quad + 2 \overline{B_{m-1}(t)B_m(t)}]. \end{aligned}$$

Далее, учитывая, что

$$\begin{aligned} 2 \overline{B_i(t)B_k(t)} &= \overline{B^2_i(t)} + \overline{B^2_k(t)} - \overline{[B_i(t) - B_k(t)]^2} = \\ &= \overline{B^2_i(t)} + \overline{B^2_k(t)} - \beta^2/T, \end{aligned} \quad (5.39)$$

после сокращений получим:

$$T\overline{B_1'^2(t)} = \frac{m-1}{2m}\beta^2 = Q_{B'}^2. \quad (5.40)$$

Совершенно аналогично

$$T\overline{B_i'^2(t)} = \frac{m-1}{2m}\beta^2 = Q_{B'}^2. \quad (5.41)$$

Таким образом, все сигналы $B_i'(t)$ имеют одинаковую энергию $Q_{B'}^2$.

Для отыскания потенциальной помехоустойчивости этой системы образуем систему

$$B_i''(t) = B_i'(t) + C(t), \quad (5.42)$$

беря $C(t)$ ортогональным ко всем $B_i'(t)$.

Подберем величину $C(t)$, чтобы все сигналы $B_i''(t)$ были взаимно ортогональны, т. е. чтобы выполнялись равенства

$$\overline{B_i''(t)B_k''(t)} = \overline{B_i'(t)B_k'(t)} + \overline{C^2(t)} = 0$$

При $i \neq k$.

Для этого необходимо, чтобы

$$\overline{C^2(t)} = -\overline{B_i'(t)B_k'(t)} = \frac{1}{2}\overline{[B_i'(t) - B_k'(t)]^2} - \frac{1}{2}\overline{B_i'^2(t)} - \frac{1}{2}\overline{B_k'^2(t)},$$

но

$$\overline{[B_i'(t) - B_k'(t)]^2} = \overline{[B_i(t) - B_k(t)]^2} = \beta^2/T, \quad (5.43)$$

поэтому

$$T\overline{C^2(t)} = \frac{\beta^2}{2} - \frac{m-1}{2m}\beta^2 = \frac{\beta^2}{2m}. \quad (5.44)$$

Таким образом, всегда можно подобрать $C(t)$, чтобы сигналы $B_i''(t)$ были взаимно ортогональны.

Для последней системы энергия сигналов будет:

$$Q_{B''}^2 = T\overline{B_i''^2(t)} = T\overline{B_i'^2(t)} + T\overline{C^2(t)} = \frac{\beta^2}{2}. \quad (5.45)$$

Таким образом, сигналы $B_i''(t)$ имеют одинаковую энергию и взаимно ортогональны. Для таких сигналов потенциальная помехоустойчивость была найдена. Она определяется формулой (5.12), в которой для данного случая надо подставить

$$Q^2 = Q_{B''}^2 = \frac{1}{2}\beta^2. \quad (5.46)$$

Системы сигналов $B_i'(t)$ и $B_i(t)$ имеют ту же потенциальную помехоустойчивость.

Итак, все системы из m равноудаленных друг от друга сигналов при одинаковом β имеют одну и ту же потенциальную помехоустойчивость. Наименьшую возможную среднюю энергию сигнала, равную (5.41), будут иметь те из этих систем, которые получены путем преобразования (5.38). Это будут оптимальные системы (по крайней мере среди семейства систем равноудаленных сигналов).

Оптимальная система сигналов $B'_i(t)$ (5.38) может быть образована из произвольной равноудаленной системы $B_i(t)$, например из произвольной системы ортогональных сигналов, имеющих равные энергии.

Оптимальная система несколько выгоднее ортогональной. Действительно, при равной потенциальной помехоустойчивости в оптимальной системе энергия сигналов должна быть

$$Q_{B'}^2 = \frac{m-1}{2m} \beta^2, \quad (5.47)$$

в ортогональной

$$Q^2 - Q_{B''}^2 = \frac{1}{2} \beta^2, \quad (5.48)$$

т. е. в $\frac{m}{m-1}$ раз больше. Однако эта разница при большом m незначительна.

Рассмотренная в § 4.8 система является частным случаем оптимальной системы при $m = 2$.

5.7. Приближенная оценка потенциальной помехоустойчивости

Изложенный в § 5.1 метод расчета потенциальной помехоустойчивости часто на практике бывает мало пригодным, так как вычисление вероятности выполнения неравенств (5.4) для конкретных задач во многих случаях представляет большие математические трудности. Поэтому иногда полезно иметь простой способ приближенной оценки величины этой вероятности. Сейчас мы изложим этот способ.

Для того чтобы при посылке сигнала $A_i(t)$ произошло искажение, нужно, чтобы хотя бы одно из неравенств (5.4), в котором вместо индекса 1 поставлено i , было невыполнено. Или, что то же, для этого необходимо, чтобы было выполнено хотя бы одно из обратных неравенств, которые могут быть записаны после преобразования так:

$$\sigma \sqrt{2T} \sqrt{[A_j(t) - A_i(t)]^2} \theta_{ij} > T [A_j(t) - A_i(t)]^2 + \sigma^2 \ln \frac{P(A_i)}{P(A_j)}, \quad (5.49)$$

$$j = 1, 2, \dots, m, \text{ но } j \neq i.$$

Вероятность выполнения j -того из этих неравенств будет равна согласно (2.47)

$$P_{ij} = P(\theta_{ij} > \alpha_{ij}) = V(\alpha_{ij}), \quad (5.50)$$

где

$$\alpha_{ij} = \frac{\sqrt{T[A_j(t) - A_i(t)]^2}}{\sqrt{2}\sigma} + \frac{1}{2} \ln \frac{P(A_i)}{P(A_j)} \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{T[A_j(t) - A_i(t)]^2}}. \quad (5.51)$$

Как известно из теории вероятностей, вероятность P того, что случится хотя бы одно из событий E_1, E_2, \dots, E_m всегда лежит в пределах

$$P(E_k)_{\max} \leq P \leq \sum_{k=1}^m P(E_k),$$

где $P(E_k)$ — вероятность события E_k и $P(E_k)_{\max}$ — максимальная из вероятностей $P(E_1), P(E_2), \dots, P(E_m)$. При этом P равняется левой части неравенства, если одно из событий обязательно вызывает все остальные события, и P равняется правой части неравенства, если события E_1, \dots, E_m несовместимы.

На основании этого можно сделать вывод, что вероятность $P(A_{i \text{ иск.}})$ того, что хотя бы одно из неравенств (5.49) удовлетворится или, что то же, что посланный сигнал $A_i(t)$ примется ошибочно, будет:

$$P_{ij \text{ макс}} \leq P(A_{i \text{ иск.}}) \leq \sum_{j=1}^m P_{ij}, \quad (5.52)$$

где P_{ij} определяется из (5.50);

$P_{ij \text{ макс}}$ — максимальное значение P_{ij} , если менять индекс j от 1 до m .

Отметим, что в неравенстве (5.52) P_{ii} должно быть опущено, поскольку в (5.49) $i \neq j$. Это будет осуществляться автоматически, если положить $P_{ii} = 0$.

Умножая неравенства (5.52) на вероятность посылки сигнала $A_i(t)$, которую обозначим $P(A_i)$ и складывая их для $i = 1, \dots, m$, получим:

$$\sum_{i=1}^m P_{ij \text{ макс}} P(A_i) \leq P_{\text{иск.}} \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m P(A_i) P_{ij}, \quad (5.53)$$

где

$$P_{\text{иск.}} = \sum_{i=1}^m P(A_{i \text{ иск.}}) P(A_i) \quad (5.54)$$

— вероятность искажения при приеме на идеальный приемник при данных сигналах.

5.8. Пример передачи цифр кодом Морзе

В качестве иллюстрации применения метода, изложенного в предыдущем параграфе, определим потенциальную помехоустойчивость при передаче цифр с помощью кода Морзе. При этом будем считать, что амплитуда сигнала равна U_0 , продолжительность точки τ_0 , продолжительность тире $3\tau_0$, пауза между точкой и тире в одной цифре тоже τ_0 . Вероятности передачи различных цифр примем одинаковыми.

Обозначим сигнал, соответствующий цифре 0, через $A_0(t)$,
 1 — через $A_1(t)$,
 2 — через $A_2(t)$,

 9 — через $A_9(t)$.

Тогда, как можно убедиться, вычитая значение сигнала, соответствующее цифре i , из значения сигнала, соответствующего цифре j , считая при этом, что моменты начала сигналов совпадают и что частота колебаний много больше $\frac{1}{\tau_0}$, мы получим:

$$T[A_j(t) - A_i(t)]^2 = \nu_{ij} U_0^2 \tau_0, \tag{5.55}$$

где ν_{ij} дано в табл. 5.1.

Таблица 5.1

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1	—	4	2	4	4	4	4	4	4	5
2	4	—	3	2	3	3	2	1	1	2
3	2	3	—	2	2	2	2	3	4	5
4	4	2	2	—	1	1	2	2	3	4
5	4	3	2	1	—	1	2	3	4	5
6	4	3	2	1	1	—	1	2	3	4
7	4	2	2	2	2	1	—	1	2	3
8	4	1	3	2	3	2	1	—	1	2
9	4	1	4	3	4	3	2	1	—	1
0	5	2	5	4	5	4	3	2	1	—

Таким образом, для данного случая в соответствии с формулой (5.51) получим:

$$\alpha_{ij} = \sqrt{\frac{\nu_{ij} U_0^2 \tau_0}{2\sigma^2}} = \sqrt{\nu_{ij}} \alpha',$$

где

$$\alpha' = \sqrt{\frac{\tau_0}{2}} \frac{U_0}{\sigma}, \tag{5.56}$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} P_{ij} &= V(\sqrt{\nu_{ij}} \alpha') \text{ при } j \neq i \\ \text{и, как указывалось, } P_{ii} &= 0. \end{aligned} \right\} \tag{5.57}$$

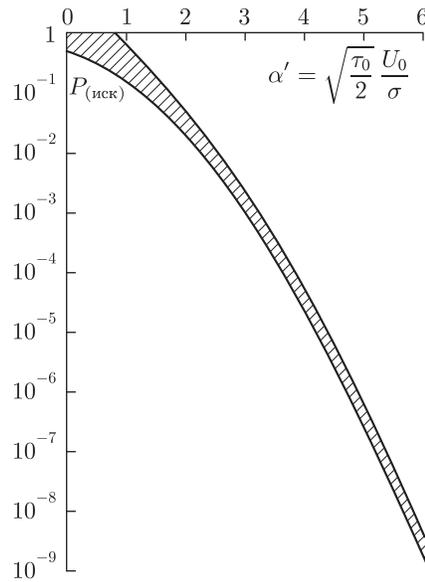
На основании этих данных можно составить таблицу.

Таблица 5.2

i	$P_{ij \text{ макс}}$	$\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^9 P_{ij}$
1	P_2	$P_2 + 7P_4 + P_5$
2	P_1	$2P_1 + 3P_2 + 3P_3 + P_4$
3	P_2	$5P_2 + 2P_3 + P_4 + P_5$
4	P_1	$2P_1 + 4P_2 + P_3 + 2P_4$
5	P_1	$2P_1 + 2P_2 + 2P_3 + 2P_4 + P_5$
6	P_1	$3P_1 + 2P_2 + 2P_3 + 2P_4$
7	P_1	$2P_1 + 5P_2 + P_3 + P_4$
8	P_1	$3P_1 + 3P_2 + 2P_3 + P_4$
9	P_1	$3P_1 + P_2 + 2P_3 + 3P_4$
0	P_1	$P_1 + 2P_2 + P_3 + 2P_4 + 3P_5$

где обозначено:

$$P_n = V(\sqrt{n} \alpha'). \quad (5.58)$$



Фиг. 5.2. Пределы вероятности искажения цифр, передаваемых кодом Морзе, при идеальном приемнике. τ_0 — длительность; U_0 — амплитуда элементарной посылки

Учитывая далее, что в данном случае $P(A_0) = P(A_1) = \dots = P(A_9) = 0,1$, мы, применяя формулу (5.53) получим:

$$0,8P_1 + 0,2P_2 \leq P_{(\text{иск.})} \leq 1,8P_1 + 2,8P_2 + 1,6P_3 + 2,2P_4 + 0,6P_5. \quad (5.59)$$

Пределы для вероятностей неправильного приема цифры $P_{(\text{иск.})}$, даваемые этим неравенством, представлены в зависимости от α' на фиг. 5.2.

Как видно из фигуры, пределы для $P_{(\text{иск.})}$ получаются достаточно тесными.

Полученные кривые позволяют определить, каков будет в среднем процент неправильно принятых цифр при идеальном приеме, заданном отношении сигнал/помеха и заданной скорости манипуляции, от которой будет зависеть величина τ_0 .

Если провести артикуляционные испытания для приема цифровых сигналов на слух при помехах флюктуационного характера, то процент неправильно записанных цифр должен оказаться выше, чем $100P_{(\text{иск.})}$, определяемый из фиг. 5.2. Сравнивая эти данные, можно установить, насколько близка помехоустойчивость слухового приема к потенциальной помехоустойчивости и, значит, насколько путем усовершенствования приема можно надеяться еще увеличить помехоустойчивость этого вида передачи.

III

ПЕРЕДАЧА ОТДЕЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ

Глава 6

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ВЛИЯНИЯ ПОМЕХ НА ПЕРЕДАЧУ ОТДЕЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ

6.1. Общие соображения

В предыдущих главах мы рассматривали передачу дискретных сообщений и сигналов.

В этой части рассмотрим передачу, в которой сообщением будет являться параметр, могущий принимать любое значение в некоторых пределах. При этом параметр передается не непрерывно во времени, а передаются его мгновенные значения через некоторые интервалы времени, причем для передачи каждого значения используется свой сигнал.

С передачей такого типа мы имеем дело, например, при телеизмерениях.

В этом случае сигнал должен быть функцией времени и передаваемого параметра λ , который для данного сигнала — величина постоянная. Такой сигнал будем записывать так:

$$A(\lambda, t). \quad (6.1)$$

Пусть на этот сигнал наложилась помеха $W_{\mu, \nu}(t)$, тогда воздействующее на приемник колебание будет:

$$X(t) = W_{\mu, \nu}(t) + A(\lambda, t). \quad (6.2)$$

Очевидно, мы можем получить то же колебание $X(t)$, если передавался некоторый другой параметр, скажем, λ' , и помеха приняла такое значение $W'_{\mu, \nu}$, что

$$W'_{\mu, \nu}(t) + A(\lambda', t) = X(t). \quad (6.3)$$

Такой случай всегда возможен, поскольку, как уже отмечалось, нормально флюктуационная помеха может принять любое значение с той или другой вероятностью.

Из сказанного следует, что при наличии помехи никогда достоверно нельзя по пришедшему колебанию определить, какая величина параметра λ передавалась.

В этой главе мы определим, какова будет вероятность, что передаваемый параметр имел то или иное значение, если пришедшее колебание $X(t)$ известно. Найдем, каким свойством должен обладать приемник, чтобы он воспроизводил по пришедшему колебанию наивероятнейшее значение параметра. Такой приемник мы будем называть идеальным. Затем мы найдем значение ошибки, получаемой при воспроизведении идеальным приемником параметра. Покажем, что средняя квадратическая ошибка при идеальном приемнике будет иметь минимально возможную величину, и найдем эту величину. Эта минимально возможная ошибка будет зависеть от вида сигнала и будет характеризовать потенциальную помехоустойчивость при данном сигнале.

Рассмотренный в этой части материал мы широко используем также в дальнейшем при рассмотрении помехоустойчивости телефонной передачи с импульсной модуляцией.

6.2. Определение вероятности передававшегося параметра

Пусть передаваемый параметр λ будет безразмерной величиной и может принимать любые значения от -1 до $+1$ равновероятно.

Очевидно, если эти условия не будут удовлетворяться, то путем пересчета и введения нового параметра они могут быть удовлетворены.

Примем, что в случае, когда подлежащий передаче параметр λ будет лежать в пределах

$$\frac{k}{m} < \lambda < \frac{k+1}{m},$$

где $k = -m, -m+1, \dots, 0, \dots, m-1$, причем m — целое число, то вместо него мы будем передавать параметр

$$\lambda_k = \frac{k}{m}.$$

При такой передаче мы получим ошибку, не превышающую $1/m$, что вполне допустимо, если выбрать m достаточно большим.

Очевидно, при этих условиях передаваемый сигнал может иметь $2m$ дискретных значений

$$A(\lambda_k, t) = A_k(t)$$

и к нему мы сможем применить рассуждения гл. 3.

Таким образом, если положить, что пришедшее колебание будет $X(t)$, то вероятность того, что передававшийся параметр имел значение λ_k и, значит, передававшийся сигнал был $A_k(t)$, будет в соответствии с формулами (3.10) и (3.7) равна величине

$$P_X(A_k) = \frac{e^{-\frac{T[X(t)-A(\lambda_k, t)]^2}{\sigma^2}}}{\sum_{l=-m}^{m-1} e^{-\frac{T[X(t)-A(l/m, t)]^2}{\sigma^2}}},$$

как это следует из условия:

$$P(A_{-m}) = \dots = P(A_0) = P(A_1) = \dots = P(A_{m-1}),$$

справедливого для данного случая.

Исходя из этого, вероятность того, что при пришедшем колебании $X(t)$ передававшийся параметр лежал в пределах

$$\lambda' < \lambda < \lambda'',$$

где $\lambda' = \frac{k'}{m}$ и $\lambda'' = \frac{k''}{m}$, будет равна

$$P_x(\lambda' < \lambda < \lambda'') = \frac{\sum_{k=k'}^{k''} e^{-\frac{T[X(t)-A(\frac{k}{m}, t)]^2}{\sigma^2}}}{\sum_{k=-m}^{m-1} e^{-\frac{T[X(t)-A(\frac{k}{m}, t)]^2}{\sigma^2}}}.$$

Если теперь умножить числитель и знаменатель этой дроби на $\Delta\lambda = \frac{1}{m}$ и стремиться $\frac{1}{m}$ к нулю, то суммы будут стремиться к интегралам, и мы получим:

$$P_x(\lambda' < \lambda < \lambda'') = \frac{\int_{\lambda'}^{\lambda''} e^{-\frac{T[X(t)-A(\lambda, t)]^2}{\sigma^2}} d\lambda}{\int_{-1}^{+1} e^{-\frac{T[X(t)-A(\lambda, t)]^2}{\sigma^2}} d\lambda}. \quad (6.4)$$

Полагая $\lambda'' = \lambda' + d\lambda$, мы придем к выражению

$$P_x(\lambda' < \lambda < \lambda' + d\lambda) = \frac{e^{-\frac{T[X(t)-A(\lambda, t)]^2}{\sigma^2}} d\lambda}{\int_{-1}^{+1} e^{-\frac{T[X(t)-A(\lambda, t)]^2}{\sigma^2}} d\lambda} = P_x(\lambda') d\lambda, \quad (6.5)$$

или

$$P_x(\lambda') = K_x e^{-\frac{T[X(t)-A(\lambda', t)]^2}{\sigma^2}}, \quad (6.6)$$

причем K_x — постоянная, зависящая от $X(t)$ и не зависящая от λ' и t .

Из сказанного следует, что если все значения передаваемого параметра разбить на области с одинаковой шириной $d\lambda$, то чаще всего пришедшему колебанию $X(t)$ будет соответствовать значение передаваемого параметра λ , лежащее в области:

$$\lambda_{xH} < \lambda < \lambda_{xH} + d\lambda,$$

где λ_{xH} — значение параметра λ , при котором функция $P_x(\lambda')$ имеет максимум.

Мы будем называть λ_{xH} наивероятнейшим значением передаваемого параметра λ .

Из формулы (6.6) очевидно, что при $\lambda = \lambda_{xH}$ величина

$$\overline{[X(t) - A(\lambda, t)]^2} \quad (6.7)$$

должна иметь минимальное значение.

Если эта функция и ее производная по λ непрерывны при изменении λ , то, очевидно, λ_{xH} должно удовлетворять уравнению

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \overline{[X(t) - A(\lambda, t)]^2} \right\}_{\lambda=\lambda_{xH}} = -2 \overline{[X(t) - A(\lambda_{xH}, t)] A'_\lambda(\lambda_{xH}, t)} = 0, \quad (6.8)$$

где обозначено:

$$A'_\lambda(\lambda_{xH}, t) = \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} A(\lambda, t) \right\}_{\lambda=\lambda_{xH}}. \quad (6.9)$$

Приемник, который всегда будет воспроизводить в соответствии с пришедшим колебанием $X(t)$ наивероятнейшее значение параметра λ_{xH} , дающего минимум выражения (6.7), мы будем называть идеальным приемником.

6.3. Функция $P_x(\lambda)$ вблизи наивероятнейшего значения λ_{xH}

Найдем $P_x(\lambda)$, введенную в § 6.2, вблизи наивероятнейшего значения $\lambda - \lambda_{xH}$, т.е. вблизи ее максимума.

В общем виде эта функция задается уравнением (6.6). Считая λ близким λ_{xH} , можно принять:

$$A(\lambda, t) = A(\lambda_{xH}, t) + A'_\lambda(\lambda_{xH}, t)(\lambda - \lambda_{xH}). \quad (6.10)$$

Подставляя это выражение в формулу (6.6) и учитывая соотношение (6.8), получим:

$$\begin{aligned} P_x(\lambda) &= K_x e^{\frac{T \overline{[X(t) - A(\lambda_{xH}, t)]^2} - T A'^2_\lambda(\lambda_{xH}, t) (\lambda - \lambda_{xH})^2}{\sigma^2}} = \\ &= K'_x e^{\frac{T A'^2_\lambda(\lambda_{xH}, t)}{\sigma^2} (\lambda - \lambda_{xH})^2}, \quad (6.11) \end{aligned}$$

где K'_x — некоторая постоянная, не зависящая от λ . Таким образом, функция $P_x(\lambda)$ в области, где уравнение (6.10) может считаться справедливым, будет определяться гауссовой кривой.

В случае, если интенсивность помехи σ достаточно мала, показатель в выражениях (6.6) и (6.11) за пределами области, в которой справедливо равенство (6.10), становится по абсолютной величине настолько большим, что величиной $P_x(\lambda)$ за пределами этой области можно пренебречь. В этом случае можно считать, что функция вероят-

ности $P_x(\lambda)$ будет целиком определяться гауссовой кривой. Для этого случая постоянная K'_x может быть легко вычислена из условия

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_x(\lambda) d\lambda = 1. \quad (6.12)$$

Подставляя в это равенство значение $P_x(\lambda)$ из уравнения (6.11), мы после интегрирования находим:

$$K'_x = \frac{\sqrt{TA'_\lambda{}^2(\lambda_{xн}, t)}}{\sqrt{\pi} \sigma}. \quad (6.13)$$

Поэтому при достаточно малой интенсивности помехи можно считать:

$$P_x(\lambda) = \frac{\sqrt{TA'_\lambda{}^2(\lambda_{xн}, t)}}{\sqrt{\pi} \sigma} e^{-\frac{TA'_\lambda{}^2(\lambda_{xн}, t)}{\sigma^2} (\lambda - \lambda_{xн})^2}. \quad (6.14)$$

Следует отметить, что в этом случае $P_x(\lambda)$ зависит от приходящего колебания $X(t)$ только постольку, поскольку от этого зависит величина $\lambda_{xн}$.

В этих вычислениях для простоты принималось, что уравнение (6.11) справедливо для всех значений λ , лежащих между $-\infty$ и $+\infty$. Однако это будет не всегда верно даже при малых σ . Действительно, всегда при $\lambda < -1$ и $\lambda > +1$ величина $P_x(\lambda)$ должна равняться нулю, и, значит, в тех случаях, когда $\lambda_{xн}$ близко к ± 1 выражения (6.13) и (6.14) могут давать большую ошибку. Поэтому полученные в этом и в последующих, базирующихся на этом параграфах результаты нуждаются в уточнении для случая, когда $\lambda_{xн}$ близко к минус или плюс единице.

6.4. Ошибки и потенциальная помехоустойчивость при помехе малой интенсивности

Пусть при приходе колебания $X(t)$ приемное устройство, не обязательно идеальное, будет воспроизводить некоторый параметр λ_x , который является функцией этого колебания. Определим среднюю квадратическую ошибку, которая при этом получится. Как уже говорилось в § 6.2, вероятность того, что при пришедшем колебании $X(t)$ передававшийся параметр лежал в пределах $\lambda, \lambda + d\lambda$, будет $P_x(\lambda)d\lambda$. Это будет также вероятностью того, что воспроизводимое приемником значение параметра λ_x будет иметь ошибку, лежащую в пределах $\lambda - \lambda_x, \lambda + d\lambda - \lambda_x$. Поэтому средняя квадратическая ошибка δ_c в этом случае будет определяться выражением

$$\delta_c^2 = \int_{-1}^{+1} (\lambda - \lambda_x)^2 P_x(\lambda) d\lambda = \int_{-1}^{+1} \lambda^2 P_x(\lambda) d\lambda - 2\lambda_x \int_{-1}^{+1} \lambda P_x(\lambda) d\lambda + \lambda_x^2,$$

поскольку всегда

$$\int_{-1}^{+1} P_x(\lambda) d\lambda = 1.$$

Как видно из этой формулы, δ_c^2 будет меняться в зависимости от выбора λ_x по параболическому закону и будет иметь при некотором $\lambda_x = \lambda_{x0}$ наименьшую величину. Продифференцировав δ_c^2 по λ_x и приравняв эту производную нулю, мы получим уравнение для λ_{x0} в таком виде:

$$\left[\frac{d(\delta_c^2)}{d\lambda_x} \right]_{\lambda_x = \lambda_{x0}} = -2 \int_{-1}^{+1} \lambda P_x(\lambda) d\lambda + 2\lambda_{x0} = 0,$$

откуда

$$\lambda_{x0} = \int_{-1}^{+1} \lambda P_x(\lambda) d\lambda, \quad (6.15)$$

или, что то же, λ_{x0} является абсциссой центра тяжести площади под кривой $P_x(\lambda)$.

Величину λ_{x0} мы будем называть оптимальным значением параметра λ .

При приходе колебания $X(t)$ наименьшее значение средней квадратической ошибки δ_c , которое наступает, если приемник будет воспроизводить значение λ_{x0} , будет определяться выражением

$$\delta_{cm}^2 = \int_{-1}^{+1} (\lambda - \lambda_{x0})^2 P_x(\lambda) d\lambda. \quad (6.16)$$

Следует отметить, что в случае, когда $P_x(\lambda)$ является одnogорбой симметричной кривой, абсцисса центра тяжести этой кривой, очевидно будет совпадать с абсциссой максимального значения и, значит, для этого случая

$$\lambda_{x0} = \lambda_{xH}. \quad (6.17)$$

Отсюда на основании результата предыдущего параграфа можно утверждать, что при достаточно малой помехе, когда $P_x(\lambda)$ определяется гауссовой кривой вероятностей, которая симметрична, λ_{x0} и λ_{xH} будут равны, и идеальный приемник будет давать минимальную среднюю квадратическую ошибку.

На основании формул (6.16) и (6.14) можно найти эту ошибку. Она будет:

$$\delta_{cm}^2 = \frac{\sigma^2}{2T A_{\lambda}^2(\lambda_{xH}, t)}. \quad (6.18)$$

Это будет наименьшая возможная ошибка при достаточно малой σ . Она будет получаться при идеальном приемнике и будет, очевидно, определять потенциальную помехоустойчивость при малых помехах. Под малыми помехами мы тут и в дальнейшем будем подразумевать помехи с достаточно малой интенсивностью для того, чтобы рассуждения § 6.3 были справедливы.

Как видно из формулы (6.18), потенциальная помехоустойчивость при передаче параметра пропорциональна удельной энергии колебания $A'_\lambda(\lambda_{xH}, t)$, являющегося производной сигнала по передаваемому параметру.

При помощи формулы (6.16) можно определить среднюю квадратическую ошибку и при больших интенсивностях помехи. Однако при помощи этой ошибки оценить потенциальную помехоустойчивость затруднительно. Дело в том, что при больших σ характер функции $P_x(\lambda)$ начинает зависеть от приходящего колебания $X(t)$ и, таким образом, δ_{cm} , определяемая по формуле (6.16), также будет зависеть от $X(t)$. В этом случае для оценки помехоустойчивости необходимо еще оценивать вероятность тех или иных значений $X(t)$, что приводит к ряду математических трудностей. К вопросу об оценке потенциальной помехоустойчивости при больших интенсивностях помех мы еще вернемся в гл. 8.

Найдем еще вероятность того, что идеальный приемник при малых помехах воспроизведет значение передаваемого параметра с ошибкой, превосходящей по абсолютному значению величину ε .

Очевидно, эта вероятность будет равна:

$$P(|\delta| > \varepsilon) = \int_{-1}^{\lambda_{xH} - \varepsilon} P_x(\lambda) d\lambda + \int_{\lambda_{xH} + \varepsilon}^{+1} P_x(\lambda) d\lambda.$$

Используя формулу (6.14) и принимая во внимание обозначения, принятые в формуле (2.47), мы получим:

$$P(|\delta| > \varepsilon) = 2V \left(\frac{\sqrt{2T A'_\lambda{}^2(\lambda_{xH}, t)}}{\sigma} \varepsilon \right) = 2V \left(\frac{\varepsilon}{\delta_{cm}} \right). \quad (6.19)$$

6.5. Второй метод определения ошибок и потенциальной помехоустойчивости при помехе малой интенсивности

Величина ошибки при передаче параметра и малой интенсивности помехи может быть найдена и другим методом. Хотя этот метод дает результат, совпадающий с уже полученным, все же мы его рассмотрим, так как сам этот метод представляет интерес и мы им будем пользоваться в дальнейшем, правда, в более сложной форме.

Пусть, как и раньше, при передаче некоторого параметра λ посылается сигнал $A(\lambda, t)$. На этот сигнал может наложиться, но может и

не наложиться, помеха $W_{\mu,\nu}(t)$, в результате чего на приемник будет воздействовать некоторое колебание $X(t)$, равное $A(\lambda, t)$, если помехи не было, и равное $A(\lambda, t) + W_{\mu,\nu}(t)$ при наличии помехи.

Представим это колебание так:

$$X(t) = \sum_{k=1}^n x_k C_k(t), \quad (6.20)$$

где $C_k(t)$ — некоторые единичные, взаимно ортогональные, известные функции. Тогда оно будет полностью характеризоваться значениями x_1, \dots, x_n . На основании пришедшего колебания $X(t)$ приемник воспроизведет некоторое значение параметра λ , которое может совпасть, но может и не совпасть с переданным значением. Будем считать, что каждому воздействию на приемник колебанию $X(t)$ должно соответствовать определенное значение параметра, которое он будет воспроизводить.

Очевидно, для каждого приемника воспроизводимый параметр будет равен некоторой функции:

$$\lambda = F(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (6.21)$$

которая будет характеризовать его работу.

Пусть пришедшее колебание получит некоторое приращение

$$dX(t) = \sum_{k=1}^n dx_k C_k(t). \quad (6.22)$$

Очевидно, в этом случае воспроизведенный приемником параметр также получит приращение, равное:

$$d\lambda = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_k} dx_k = \overline{L(t)dX(t)}, \quad (6.23)$$

где обозначено:

$$L(t) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_k} C_k(t), \quad (6.24)$$

как это следует из (2.22).

Пусть передаваемый параметр изменен на $d\lambda$, на сигнал помеха не накладывается, тогда пришедшее на приемник колебание изменится на величину

$$dX(t) = A'_\lambda(\lambda, t)d\lambda, \quad (6.25)$$

где

$$A'_\lambda(\lambda, t) = \frac{\partial A(\lambda, t)}{\partial \lambda}. \quad (6.26)$$

Мы считаем, что в том случае, когда на сигнал помеха не накладывается, приемник будет воспроизводить передаваемый параметр без искажения. Поэтому воспроизведенный параметр в этом случае должен

измениться также на величину $d\lambda$. На основании формулы (6.23) мы получим:

$$d\lambda = \overline{L(t)A'_\lambda(\lambda, t)}d\lambda.$$

Таким образом, для приемного устройства, воспроизводящего передаваемый параметр в отсутствие помех без искажения, должно быть справедливо соотношение

$$\overline{L(t)A_\lambda(\lambda, t)} = 1. \quad (6.27)$$

Пусть теперь на передаваемый сигнал накладывается достаточно малая помеха $W_{\mu, \nu}(t)$. Тогда под действием этой помехи приходящее колебание $X(t)$ получит приращение

$$dX(t) = W_{\mu, \nu}(t),$$

а от этого воспроизведенный параметр получит в соответствии с формулой (6.23) приращение

$$\delta = d\lambda = \overline{L(t)W_{\mu, \nu}(t)} = \frac{\sigma}{\sqrt{2T}} \sqrt{\overline{L^2(t)}} \theta. \quad (6.28)$$

Последнее следует из формулы (2.60),

Таким образом, ошибка, получаемая при воспроизведении параметра приемным устройством вследствие наложения помехи, будет случайной величиной, подчиняющейся закону Гаусса. Среднее квадратическое значение ошибки будет определяться, как это следует из формулы (2.50), величиной

$$\delta_c^2 = \overline{L^2(t)} \frac{\sigma^2}{2T}. \quad (6.29)$$

Найдем теперь, каким должен быть приемник для того, чтобы среднее квадратическое значение ошибки было минимальным.

Для этого, очевидно, нужно выбрать приемное устройство таким, чтобы при соблюдении обязательного равенства (6.27) величина $\overline{L^2(t)}$ была наименьшей.

Очевидно, любую функцию $L(t)$ можно представить всегда состоящей из двух слагаемых:

$$L(t) = L_1(t) + L_2(t), \quad (6.30)$$

причем первая из них будет «совпадать по направлению» с функцией $A'_\lambda(\lambda, t)$, т. е.

$$L_1(t) = \rho A'_\lambda(\lambda, t), \quad (6.31)$$

где ρ — некоторое постоянное число, а вторая ортогональна этой функции, т. е.

$$\overline{L_2(t)A'_\lambda(\lambda, t)} = \frac{1}{\rho} \overline{L_2(t)L_1(t)} = 0. \quad (6.32)$$

Тогда

$$\overline{L(t)A'_\lambda(\lambda, t)} = \overline{L_1(t)A'_\lambda(\lambda, t)} = \rho \overline{A_\lambda'^2(\lambda, t)}, \quad (6.33)$$

что на основании условия (6.27) даст:

$$\rho = \frac{1}{A_{\lambda}^{\prime 2}(\lambda, t)}, \quad (6.34)$$

откуда

$$L_1(t) = \frac{A_{\lambda}'(\lambda, t)}{A_{\lambda}^{\prime 2}(\lambda, t)}. \quad (6.35)$$

Что же касается $L_2(t)$, то оно в условие (6.27) не войдет и может иметь любое значение.

Далее,

$$\overline{L^2(t)} = \overline{L_1^2(t)} + \overline{L_2^2(t)},$$

так как

$$\overline{L_1(t)L_2(t)} = 0.$$

Из этой формулы следует, что при выполнении условия (6.27) $\overline{L^2(t)}$ будет иметь минимальное значение, если $L_2(t) = 0$.

Таким образом, мы получим минимальные значения ошибки, если

$$L(t) = \frac{A_{\lambda}'(\lambda, t)}{A_{\lambda}^{\prime 2}(\lambda, t)}, \quad (6.36)$$

причем эта минимальная ошибка δ_m будет в соответствии с формулой (6.28) равна:

$$\delta_m = \frac{\sigma}{\sqrt{2TA_{\lambda}^{\prime 2}(\lambda, t)}}\theta, \quad (6.37)$$

откуда для минимального значения средней квадратической ошибки мы получим выражение

$$E\delta_m^2 = \delta_{cm}^2 = \frac{\sigma^2}{2TA_{\lambda}^{\prime 2}(\lambda, t)}, \quad (6.38)$$

что совпадает с формулой (6.18), полученной для этой величины ранее.

6.6. Итоги гл. 6

Основные выводы, полученные в гл. 6, могут быть сформулированы следующим образом.

Пусть параметр λ передается при помощи сигнала $A(\lambda, t)$, являющегося непрерывной функцией λ , тогда наименьшая средняя квадратическая ошибка, вызванная наложением на сигнал помехи с малой интенсивностью, получится при идеальном приемнике, который воспроизводит при приходе некоторого колебания $X(t)$ такое значение параметра λ , при котором величина

$$\overline{[X(t) - A(\lambda, t)]^2} \quad (6.39)$$

имеет минимальное значение.

При этом вероятность получения той или иной ошибки в воспроизведении параметра будет подчиняться закону Гаусса. Среднее квадратическое значение δ_{cm} этой ошибки будет:

$$\delta_{cm}^2 = \frac{\sigma^2}{2T[A'_\lambda{}^2(\lambda, t)]^2}, \quad (6.40)$$

где

$$A'(\lambda, t) = \frac{\partial A(\lambda, t)}{\partial \lambda}. \quad (6.41)$$

Эта ошибка будет минимально возможной и будет характеризовать потенциальную помехоустойчивость при сигнале $A(\lambda, t)$ и помехе с малой интенсивностью.

Таким образом, потенциальная помехоустойчивость в этих условиях будет определяться целиком удельной энергией $T A'_\lambda{}^2(\lambda, t)$ и будет тем больше, чем больше эта энергия.

6.7. Геометрическое толкование материала гл. 6

Как мы уже видели, колебание может быть представлено радиусом-вектором или, что то же, точкой многомерного пространства. Дискретные сигналы, которые мы рассматривали во второй части данной работы, могли быть представлены дискретными точками. Сигналы, которые мы рассматривали в этой главе, могут принимать непрерывный ряд значений, как и параметр, который они характеризуют. При этом точки, характеризующие сигнал, будут лежать на некоторой линии. Эту линию мы будем называть *линией сигнала*.

Если к колебанию сигнала прибавится колебание помехи, то полученное суммарное колебание $X(t)$ будет характеризоваться некоторой новой точкой, которая чаще всего не будет попадать на линию сигнала.

Как мы видели, при приходе колебания $X(t)$ наивероятнейшее значение параметра будет то, которое дает минимальное значение выражения (6.7), т.е. то, которому соответствует самая ближняя к $X(t)$ точка линии сигнала. Это естественно, поскольку более короткие радиусы-векторы помехи более вероятны и, значит, наиболее вероятно, что колебание $X(t)$ образовалось путем добавления вектора помехи к ближайшей точке линии сигнала. Это значение параметра будет воспроизводить идеальный приемник.

Мы видели, что чем больше величина $A'_\lambda{}^2(\lambda, t)$, тем меньшими будут ошибки из-за наложения помех. Величина $\sqrt{A'_\lambda{}^2(\lambda, t)} d\lambda$ характеризует длину отрезка, на который сместится изображающая точка по линии сигнала, когда передаваемый параметр получит приращение $d\lambda$. Вполне естественно, что чем больше это смещение, тем меньше вероятность, что под действием помехи такое смещение произойдет.

Таким образом, для увеличения потенциальной помехоустойчивости при малых помехах следует выбирать такие системы передачи, в ко-

торых линия сигналов при изменении параметра λ от -1 до $+1$ будет наиболее длинной.

Глава 7

ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ РАЗНЫХ СИСТЕМАХ ПЕРЕДАЧИ ОТДЕЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ И ПОМЕХЕ МАЛОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ

7.1. Амплитудная модуляция

В этой главе мы рассмотрим помехоустойчивость некоторых систем, служащих для передачи отдельных значений параметров при малых помехах в смысле § 6.3.

Сначала мы исследуем несколько систем модуляции в отдельности, затем их сравним.

Начнем рассмотрение с амплитудной модуляции, при которой сигнал может быть записан выражением

$$A(\lambda, t) = (1 + \lambda)B(t), \quad (7.1)$$

где $B(t)$ — некоторое колебание;

λ — постоянная для данного сигнала величина, характеризующая значение передаваемого параметра.

При этом сигнале мы получим:

$$A'_\lambda(\lambda, t) = B(t),$$

откуда для минимальной средней квадратической ошибки, характеризующей потенциальную помехоустойчивость, мы получим выражение

$$\delta_{cm}^2 = \frac{\sigma^2}{2T\overline{B^2(t)}}, \quad (7.2)$$

где

$$4T\overline{B^2(t)} = T\overline{A^2(1, t)} = Q_m^2. \quad (7.3)$$

Величина Q_m^2 является максимальной удельной энергией сигнала.

Таким образом, максимальная средняя квадратическая ошибка, характеризующая потенциальную помехоустойчивость, при амплитудной модуляции будет определяться лишь энергией сигнала и не зависит от его формы.

Этот результат становится вполне очевидным при геометрической интерпретации разобранной модуляции. Действительно, при амплитудной модуляции линия сигнала является отрезком прямой, один конец которого находится в начале координат. Чем длиннее эта линия, тем больше помехоустойчивость, но в то же время больше и длина максимального радиуса-вектора этой линии, а значит, и энергия сигнала, соответствующего этому радиусу-вектору.

Интересно отметить, что при амплитудной модуляции любая помеха будет в смысле § 6.3 считаться достаточно малой, поскольку в этом случае формула (6.10) будет справедлива для любых λ . В этом случае неточность в вычислении средней квадратической ошибки может внести лишь краевой эффект, о котором упоминалось в конце § 6.3.

7.2. Линейная модуляция

Разобранная амплитудная модуляция является частным случаем линейной модуляции, при которой сигнал определяется выражением

$$A(\lambda, t) = \lambda B(t) + B_0(t), \quad (7.4)$$

где $B(t)$ и $B_0(t)$ — некоторые колебания.

Минимальная средняя квадратическая ошибка в этом случае, как нетрудно убедиться, будет также выражаться формулой (7.2). Однако в этой модуляции можно, сохраняя потенциальную помехоустойчивость, уменьшить максимальную удельную энергию сигнала. При линейной модуляции линия сигнала также будет являться отрезком прямой, длина которого будет равна $2\sqrt{\overline{B^2(t)}}$. Сохраняя эту длину и, значит, помехоустойчивость, можно выбором $B_0(t)$ так переместить линию сигнала, чтобы максимальные радиусы-векторы этой прямой стали возможно более короткими. Как нетрудно догадаться, для этого нужно взять:

$$B_0(t) = 0.$$

При этом середина нашего прямолинейного отрезка попадет в начало координат, и максимальная удельная энергия сигнала будет иметь наименьшее возможное значение

$$Q_m^2 = T\overline{B^2(t)}, \quad (7.5)$$

при этом минимальная средняя квадратическая ошибка будет выражаться через Q_m^2 так:

$$\delta_{cm}^2 = \frac{\sigma^2}{2Q_m^2}. \quad (7.6)$$

Таким образом, в этом случае мы получим выигрыш по мощности в 4 раза по сравнению с амплитудной модуляцией. Однако осуществление этой системы вызовет технические трудности, так как при ней приемник должен обязательно реагировать на фазу сигнала, которая меняется при переходе через нуль.

При линейной системе модуляции, так же как и при амплитудной, любая помеха будет считаться достаточно малой.

Применение нелинейных модуляций, при которых линия сигнала не будет прямой, позволяет значительно увеличить помехоустойчивость при малых помехах без увеличения энергии сигнала. Причиной этого является то, что в этом случае линию сигнала можно, сделав изогнутой, очень сильно удлинить, не увеличив при этом максимального

расстояния между точками этой линии и началом координат, т. е. не увеличив максимальной энергии сигнала.

7.3. Общий случай время-импульсной модуляции

Начнем рассмотрение нелинейных систем модуляции с время-импульсной системы.

При этой системе огибающая высокочастотного импульса может смещаться по времени, не изменяя своей формы, в зависимости от значения передаваемой величины.

В общем виде уравнение сигнала при такой модуляции может быть записано так:

$$A(\lambda, t) = U_m \left(1 - \frac{\tau_0}{2} \lambda \right) \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (7.7)$$

Входящая сюда величина τ_0 будет характеризовать максимальное перемещение импульса при изменении λ в пределах ± 1 .

Приемник при такой модуляции должен как-то реагировать на сдвиг по времени огибающей приходящего импульса. Обычно в такой системе передачи посылается еще некоторый сигнал для установления момента начала отсчета времени на приеме. Однако этими деталями в настоящей работе мы интересоваться не будем, считая, что момент начала отсчета времени на приеме нам известен.

Найдем среднюю квадратическую ошибку от наложения на сигнал помехи с малой интенсивностью при приеме на идеальный приемник.

Для этого воспользуемся формулой (6.38). Для нашего случая мы будем иметь:

$$A'(\lambda, t) = \frac{\partial U_m \left(t - \frac{\tau_0 \lambda}{2} \right)}{\partial \lambda} \cos(\omega_0 t + \varphi) = - \frac{\partial U_m \left(t - \frac{\tau_0 \lambda}{2} \right)}{\partial t} \cdot \frac{\tau_0}{2} \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

откуда:

$$\overline{A'^2(\lambda, t)} = \frac{\tau_0^2}{4} \overline{\left[\frac{\partial U_m \left(t - \frac{\tau_0 \lambda}{2} \right)}{\partial t} \right]^2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi).$$

Будем считать, что квадрат квадратной скобки, входящей в это выражение, не содержит частоты $2\omega_0$, что почти всегда имеет место, так как огибающая $U_m(t)$ обычно не имеет высокочастотных составляющих. Тогда, применяя формулу (2.26), получим:

$$A'^2(\lambda, t) = \frac{\tau_0^2}{8} \overline{\left[\frac{\partial U_m(t)}{\partial t} \right]^2},$$

поскольку

$$\overline{\left[\frac{\partial U_m \left(t - \frac{\tau_0 \lambda}{2} \right)}{\partial t} \right]^2} = \overline{\left[\frac{\partial U_m(t)}{\partial t} \right]^2}$$

и

$$\overline{\cos^2(\omega_0 t + \varphi)} = \frac{1}{2},$$

откуда значение средней квадратической ошибки при применении идеального приемника будет определяться выражением

$$\delta_{cm}^2 = \frac{4\sigma^2}{\tau_0^2 T \left[\frac{\partial U_m(t)}{\partial t} \right]^2}. \quad (7.8)$$

Как видно из этой формулы, ошибка будет тем меньше, чем больше τ_0 и чем больше удельная энергия колебания $\frac{\partial U_m(t)}{\partial t}$, равная:

$$T \left[\frac{\partial U_m(t)}{\partial t} \right]^2 = \int_{-T/2}^{+T/2} \left[\frac{\partial U_m(t)}{\partial t} \right]^2 dt.$$

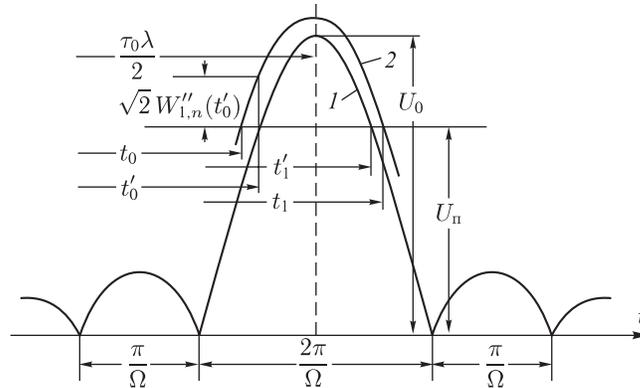
От остальных параметров сигнала ошибка не зависит.

7.4. Частный случай время-импульсной модуляции (потенциальная помехоустойчивость)

Для получения конкретных данных рассмотрим частный случай время-импульсной модуляции.

Пусть передаваемый сигнал будет:

$$A(\lambda, t) = U_m(t) \cos \omega_0 t = U_0 \frac{\sin \Omega \left(t - \frac{\tau_0 \lambda}{2} \right)}{\Omega \left(t - \frac{\tau_0 \lambda}{2} \right)} \cos \omega_0 t. \quad (7.9)$$



Фиг. 7.1. Кривая 1 — огибающая импульса; 2 — то же при наложении помехи

Огибающая этого сигнала изображена кривой 1 на фиг. 7.1. Она имеет максимальное значение при $t = \frac{\tau_0 \lambda}{2}$. Спектр этого сигнала лежит целиком в пределах от $\frac{\omega_0 - \Omega}{2\pi}$ до $\frac{\omega_0 + \Omega}{2\pi}$.

Найдем минимальную среднюю квадратическую ошибку для данного случая.

Мы имеем:

$$T \overline{\left[\frac{\partial U_m(t)}{\partial t} \right]^2} = \int_{-T/2}^{+T/2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\sin \Omega t}{\Omega t} \right) \right]^2 dt = \int_{-T/2}^{+T/2} \left[\frac{\Omega^2 t \cos \Omega t - \Omega \sin \Omega t}{\Omega^2 t^2} \right]^2 dt.$$

Стремя пределы интегрирования к $\pm\infty$, что, очевидно, можно сделать, поскольку T может быть сколь угодно большим, мы получим:

$$T \overline{\left[\frac{\partial U_m(t)}{\partial t} \right]^2} = \frac{\pi}{3} \Omega U_0^2, \quad (7.10)$$

откуда на основании формулы (7.8) следует, что минимальная среднеквадратичная ошибка будет равна:

$$\delta_{cm}^2 = \frac{12\sigma^2}{\pi\tau_0^2 \Omega U_0^2}. \quad (7.11)$$

Для удобства сравнения с другими системами выразим U_0^2 через удельную энергию сигнала Q .

В соответствии с приложением А эта удельная энергия будет равна:

$$Q^2 = T \overline{A^2(\lambda, t)} = \frac{1}{2} T \overline{U_m^2(t)}.$$

Таким образом,

$$Q^2 = \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{+T/2} \frac{\sin^2 \Omega t}{\Omega^2 t^2} dt = \frac{\pi}{2\Omega} U_0^2. \quad (7.12)$$

При этом интегрировании пределы были заменены для упрощения результата на $\pm\infty$.

Вводя это значение в формулу (7.11), мы получим:

$$\delta_{cm}^2 = \frac{6\sigma^2}{\tau_0^2 \Omega^2 Q^2}. \quad (7.13)$$

При этой системе модуляции все точки линии сигнала имеют постоянное расстояние от начала координат, равное $\sqrt{\overline{A^2(\lambda, t)}}$. Таким образом, эта линия будет лежать на некоторой псевдосфере. Как видно из формулы (7.13), помехоустойчивость и, значит, длина линии сигнала будут при сохранении удельной энергии и, значит, радиуса

псевдосферы, на которой будет лежать линия сигнала, увеличиваться с увеличением τ_0 и Ω .

7.5. Частный случай время-импульсной модуляции (помехоустойчивость при первом методе приема)

Разобранный в предыдущем параграфе время-импульсный способ модуляции, как видно из формул (7.2), (7.6) и (7.13), может обеспечить большую потенциальную помехоустойчивость по сравнению с амплитудной и линейной модуляцией. Однако для практики важно знать, насколько легко эту большую потенциальную помехоустойчивость можно реализовать. Для выяснения этого вопроса мы остановимся на двух конкретных методах приема сигналов, рассмотренных в предыдущем параграфе.

Допустим, что приемное устройство отмечает момент времени t_0 , когда амплитуда приходящего сигнала достигнет некоторой величины U_n , скажем, в этот момент в приемнике вспыхивает газосветная лампочка, и это фиксируется на движущейся светочувствительной пленке.

Под действием приходящей помехи этот момент будет меняться, что создаст некоторую ошибку. Найдем ее.

Будем считать, что в приемнике имеется идеальный фильтр, пропускающий полосу частот от $\frac{\omega_0 - \Omega}{2\pi}$ до $\frac{\omega_0 + \Omega}{2\pi}$, т. е. полосу частот, в которой имеются составляющие нашего сигнала. Тогда, очевидно, мы можем считаться лишь с составляющими помехи, лежащими в этой полосе. Эти составляющие в сумме дают колебание $W_{\mu, \nu}(t)$, даваемое формулой (В-6) (приложение В).

При этом амплитуда суммарного колебания сигнала и помехи будет выражаться так:

$$U_{\Sigma} = \sqrt{[U_m(t) + \sqrt{2} W'_{1,n}]^2 + 2W'_{1,n}(t)}. \quad (7.14)$$

Если принять, что

$$U_m^2(t) \gg W'_{1,n}$$

вследствие малой интенсивности помехи, то можно, пренебрегая $W'_{1,n}(t)$, считать:

$$U_{\Sigma} = U_m(t) + \sqrt{2} W'_{1,n}(t). \quad (7.15)$$

Посмотрим, насколько под действием помехи сместится момент времени, который отмечает приемник, т. е. момент времени t_0 , когда величина амплитуды принимаемого колебания достигает величины U_n .

На фиг. 7.1 кривая 1 изображает изменение величины U_m от t ; кривая 2 — изменение суммарной амплитуды U_{Σ} от t . Расстояние между этими кривыми по вертикали будет равно в соответствии с формулой (7.15) величине $W'_{1,n}$. На этой фигуре наглядно видно, насколько

сместится момент времени t_0 под действием помехи. Это смещение даст ошибку в определении параметра λ , равную:

$$\delta = \frac{t'_0 - t_0}{\tau_0/2}, \quad (7.16)$$

поскольку при изменении λ на единицу t_0 смещается на $\tau_0/2$. Тут через t'_0 мы обозначили момент времени, когда амплитуда сигнала достигнет величины U_n . Предположим, что величина погрешности δ настолько мала, что за время $t'_0 - t_0$ можно считать величину $W''_{1,n}$ постоянной, а отрезок кривой $U_m(t)$ прямолинейным. Тогда соотношение между δ и $W''_{1,n}(t'_0)$ может быть найдено из фигуры. Оно, очевидно, будет равно:

$$\left[\frac{\partial U_m(t)}{\partial t} \right]_{t=t'_0} = \frac{\sqrt{2} W''_{1,n}(t'_0)}{t'_0 - t_0}. \quad (7.17)$$

Отсюда, учитывая приложения В и С, получим:

$$\delta = \frac{2(t'_0 - t_0)}{\tau_0} = \frac{2\sqrt{\frac{\Omega}{\pi}} \sigma \theta}{\tau_0 \left[\frac{\partial U_m(t)}{\partial t} \right]_{t=t'_0}}, \quad (7.18)$$

где θ — нормальная случайная величина.

Как мы видим из этой формулы, ошибка δ , как и в случае идеального приемного устройства, будет подчиняться закону Гаусса. Средняя квадратическая ошибка будет равна:

$$E\delta^2 = \delta_c^2 = \frac{4\Omega\sigma^2}{\pi\tau_0^2 \left[\frac{\partial U_m(t)}{\partial t} \right]_{t=t'_0}^2}. \quad (7.19)$$

Исходя из формулы (7.9), мы получим:

$$\left[\frac{\partial U_m(t)}{\partial t} \right]_{t=t_0} = U_0\Omega \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}, \quad (7.20)$$

где

$$x = \Omega \left(t'_0 - \frac{\tau_0\lambda}{2} \right).$$

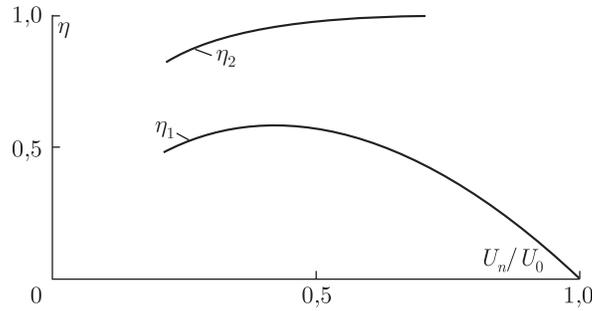
Задаваясь различными значениями x , мы можем определить по формулам (7.20) и (7.19) величину δ_c^2 , которая может быть представлена так:

$$\delta_c^2 = \frac{12\sigma^2}{\pi\eta_1\tau_0^2\Omega U_0^2} = \frac{6\sigma^2}{\eta_1\tau_0^2\Omega^2 Q^2}, \quad (7.21)$$

где η_1 является функцией x , а Q^2 определяется формулой (7.12).

На основании формулы

$$U_n = U_0 \frac{\sin x}{x} \quad (7.22)$$



Фиг. 7.2. Коэффициент использования мощности при время-импульсной модуляции: η_1 — для приема по одному фронту; η_2 — по двум фронтам; U_n — амплитуда, на которой делается отсчет; U_0 — максимальная амплитуда импульса

мы можем найти зависимость x и, значит, η_1 от U_n/U_0 . Последняя зависимость дается кривой фиг. 7.2.

Сравнивая формулы (7.21) и (7.13), мы видим, что поскольку η_1 всегда меньше единицы, помехоустойчивость при способе приема, рассмотренном в этом параграфе, будет меньше потенциальной помехоустойчивости и что η_1 является введенным в § 4.2 коэффициентом использования мощности, показывающим, насколько можно уменьшить энергию или мощность сигнала при идеальном приеме, чтобы получить ту же помехоустойчивость, т. е. то же δ_c^2 , что и при данном способе приема.

Как видно из фиг. 7.2, η_1 имеет максимальное значение при $U_n/U_0 = 0,41$, которое равно 0,58.

7.6. Частный случай время-импульсной модуляции (помехоустойчивость при втором методе приема)

Попытаемся уменьшить среднюю квадратическую ошибку по сравнению с тем, что мы получили при методе приема, описанном в предыдущем параграфе. Такое уменьшение возможно, поскольку полученная ошибка больше, чем дает идеальный приемник. Для этого применим приемник, отмечающий как момент времени t_0 , когда амплитуда входящего колебания, возрастая, достигнет величины U_n , так и момент t_1 , когда амплитуда входящего колебания, уменьшаясь, снова достигнет величины U_n . О величине передаваемого параметра λ мы будем судить по среднему значению:

$$\frac{t_0 + t_1}{2}. \quad (7.23)$$

Вследствие наложения помехи мы опять получим ошибку как при отсчете момента t_0 , так и при отсчете момента t_1 . Обозначим эти ошибки δ_0 и δ_1 соответственно. Очевидно, исходя из формулы (7.16) и

(7.17), мы будем иметь:

$$\delta_0 = \frac{2(t'_0 - t_0)}{\tau_0} = \frac{2\sqrt{2} W''_{1,n}(t'_0)}{\tau_0 \left[\frac{\partial U_m(t)}{\partial t} \right]_{t=t'_0}}, \quad (7.24)$$

$$\delta_1 = \frac{2(t'_0 - t_1)}{\tau_0} = \frac{2\sqrt{2} W''_{1,n}(t'_1)}{\tau_0 \left[\frac{\partial U_m(t)}{\partial t} \right]_{t=t'_1}}, \quad (7.25)$$

где t'_0 — момент времени, когда $U_m(t)$ достигнет величины U_n , возрастая;

t'_1 — момент времени, когда $U_m(t)$ достигнет величины U_n , убывая.

Так как $U_m(t)$ является симметричной функцией, то мы имеем:

$$\left[\frac{\partial U_m(t)}{\partial t} \right]_{t=t'_1} = - \left[\frac{\partial U_m(t)}{\partial t} \right]_{t=t'_0}. \quad (7.26)$$

На основании этого ошибка при отсчете по среднему значению будет равна:

$$\delta = \frac{\delta_0 + \delta_1}{2} = \frac{\sqrt{2} [W''_{1,n}(t'_0) - W''_{1,n}(t'_1)]}{\tau_0 \left[\frac{\partial U_m(t)}{\partial t} \right]_{t=t'_0}}. \quad (7.27)$$

Найдем случайную величину $W''_{1,n}(t'_0) - W''_{1,n}(t'_1)$. Тут воспользоваться прямо результатом § 2.5 нельзя, так как случайные величины $W''_{1,n}(t'_0)$ и $W''_{1,n}(t'_1)$ зависят друг от друга.

На основании формул (2.54) и (2.74) можно записать:

$$\begin{aligned} W''_{1,n}(t'_0) - W''_{1,n}(t'_1) &= \frac{\sigma}{\sqrt{2T}} \sum_{l=1}^{2n} [I_l(t'_0) - I_l(t'_1)] \theta_l = \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{2T}} \sqrt{\sum_{l=1}^{2n} [I_l(t'_0) - I_l(t'_1)]^2} \theta. \end{aligned}$$

Далее возьмем два слагаемых последней суммы и учтем выражение (2.14). Получим:

$$[I_{2i-1}(t'_0) - I_{2i-1}(t'_1)]^2 + [I_{2i}(t'_0) - I_{2i}(t'_1)]^2 = 4 \left[1 - \cos \frac{2\pi}{T} i(t'_0 - t'_1) \right],$$

откуда

$$W''_{1,n}(t'_0) - W''_{1,n}(t'_1) = \sqrt{2} \sigma \sqrt{\sum_{i=1}^n \left[1 - \cos \frac{2\pi i}{T} (t'_0 - t'_1) \right]} \frac{1}{T} \cdot \theta.$$

Если учесть, что $n = \frac{\Omega}{2\pi}T$, мы, стремя T к ∞ и вводя обозначения

$$x = \frac{i}{T}$$

и

$$dx = \frac{1}{T},$$

придем к выражению

$$\begin{aligned} W''_{1,n}(t'_0) - W''_{1,n}(t'_1) &= \sqrt{2} \sigma \sqrt{\int_0^{\frac{\Omega}{2\pi}} [1 - \cos 2\pi(t'_0 - t'_1)x] dx} \cdot \theta = \\ &= \sqrt{2} \sigma \sqrt{\frac{\Omega}{2\pi} \left[1 - \frac{\sin \Omega(t'_0 - t'_1)}{\Omega(t'_0 - t'_1)} \right]} \cdot \theta. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Подставляя полученное значение в (7.27), мы получим:

$$\delta = \frac{2\sigma \sqrt{\frac{\Omega}{2\pi}} \sqrt{1 - \frac{\sin \Omega(t'_0 - t'_1)}{\Omega(t'_0 - t'_1)}} \cdot \theta}{\tau_0 \left[\frac{\partial U_m(t)}{\partial t} \right]_{t=t'_0}}. \quad (7.29)$$

Как мы видим, и в этом случае ошибка будет случайной величиной, подчиняющейся закону Гаусса.

Из полученной формулы следует, что средняя квадратическая ошибка при данном способе приема будет равна:

$$\delta_c^2 = \frac{2\Omega \left[1 - \frac{\sin \Omega(t'_0 - t'_1)}{\Omega(t'_0 - t'_1)} \right]^2 \sigma^2}{\pi \tau_0 \left[\frac{\partial U_m(t)}{\partial t} \right]_{t=t'_0}^2}. \quad (7.30)$$

Задаваясь различными значениями U_n/U_0 , мы по формуле (7.22) можем найти величину $x = \Omega \left(t'_0 - \frac{\tau_0 \lambda}{2} \right) = \frac{1}{2} \Omega(t'_0 - t'_1)$, как это следует из симметрии $U_m(t)$, и затем по формулам (7.20) и (7.30) — величину δ_c^2 . Мы получим:

$$\delta_c^2 = \frac{12\sigma^2}{\pi \eta_2 \tau_0^2 \Omega U_0^2} = \frac{6\sigma^2}{\eta_2 \tau_0^2 \Omega^2 Q^2}, \quad (7.31)$$

где величина η_2 дается кривой 2 на фиг. 7.2 и является функцией отношения U_n/U_0 . Сравнение с формулой (7.13) показывает, что η_2 является коэффициентом использования мощности при рассмотренном методе приема. Как видно из фиг. 7.2, η_2 больше η_1 и близко к 1,

стремясь к ней при $U_n/U_0 \rightarrow 1$. Таким образом, этот вид радиоприема более помехоустойчив, чем разработанный в предыдущем параграфе, и практически реализует потенциальную помехоустойчивость. Потенциальную помехоустойчивость мы получим, если $U_n/U_0 = 1$, т. е. если будем брать отсчеты около самой вершины импульса или, что то же, определять передаваемый параметр по положению максимума амплитуды импульса.

Лучшего метода приема, чем разработанный в этом параграфе, по помехоустойчивости при малых помехах, очевидно, осуществить нельзя.

Причина повышения помехоустойчивости, очевидно, заключается в том, что в большинстве случаев (особенно при U_n/U_0 , близком к 1) помеха, накладываясь на сигнал, либо одновременно поднимает, либо одновременно опускает огибающую на обоих склонах импульса сигнала. При этом среднее значение величины t_0 и t_1 будет меняться под действием помехи меньше, чем каждая из них в отдельности.

7.7. Частотная модуляция (общий случай)

Рассмотрим помехоустойчивость системы передачи непрерывных величин (параметров) при помощи частотной модуляции.

В этом случае сигнал может быть записан так:

$$A(\lambda, t) = U_m(t) \cos[(\omega_0 + \Omega\lambda)t + \varphi_0]. \quad (7.32)$$

Применим к этому сигналу общую формулу (6.40) для отыскания минимальной средней квадратической ошибки.

Для этого найдем:

$$A'_\lambda(\lambda, t) = -U_m(t)\Omega t \sin[(\omega_0 + \Omega\lambda)t + \varphi_0].$$

Далее,

$$\overline{A'^2_\lambda(\lambda, t)} = \Omega^2 \overline{U_m^2(t)t^2 \sin^2[(\omega_0 + \Omega\lambda)t + \varphi_0]}.$$

Мы будем считать, что колебание $U_m^2(t)t^2$ не содержит частоты $2(\omega_0 + \Omega\lambda)$, тогда на основании формулы (2.26) мы получим:

$$\overline{A'^2_\lambda(\lambda, t)} = \frac{1}{2} \Omega^2 \overline{t^2 U_m^2(t)},$$

поскольку можно считать:

$$\overline{\sin^2[(\omega_0 + \Omega\lambda)t + \varphi]} = \frac{1}{2}$$

при достаточно большом T .

Подставляя это значение в формулу (6.38), мы получим:

$$\delta_{cm}^2 = \frac{\sigma^2}{\Omega^2 T \overline{U_m^2(t)t^2}}. \quad (7.33)$$

Таким образом, ошибка будет тем меньше, чем больше Ω и чем больше удельная энергия колебания $tU_m(t)$, равная:

$$T\overline{U_m^2(t)t^2} = \int_{-T/2}^{+T/2} t^2 U_m^2(t) dt. \quad (7.34)$$

Как видно из этой формулы, удельная энергия будет пропорциональна моменту инерции площади под кривой $U_m^2(t)$ относительно оси ординат.

Удельная энергия рассматриваемого сигнала в соответствии с (A.2) будет равна:

$$Q^2 = T\overline{A^2(\lambda, t)} = \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{+T/2} U_m^2(t) dt \quad (7.35)$$

при условии, что колебание $U_m^2(t)$ не содержит частот $2(\omega_0 + \Omega\lambda)$ и что T достаточно велико. Таким образом, эта энергия будет пропорциональна просто площади под кривой $U_m^2(t)$.

Если мы хотим увеличить потенциальную помехоустойчивость, не увеличивая энергии сигнала, мы должны, не увеличивая площади под кривой $U_m^2(t)$ увеличить момент инерции этой площади относительно оси ординат. Последнее, очевидно, можно сделать, увеличивая ординаты этой кривой на отдаленных от начала участках и уменьшая на близких.

Простой перенос огибающей сигнала по времени, подальше от начала отсчета, также должен увеличивать момент инерции, а значит, и помехоустойчивость без увеличения энергии сигнала.

Последнее может показаться странным, однако легко объясняется. Действительно, при $t = 0$ аргумент y косинуса выражения (7.32) и, значит, само это выражение совершенно не меняется с изменением λ . Чем больше t , тем сильнее будут изменения, что должно приводить к увеличению помехоустойчивости. Поэтому перенос огибающей должен действительно привести к увеличению помехоустойчивости.

Значение этого переноса можно уяснить себе также из следующих математических преобразований. Сдвинем в сигнале (7.32) огибающую на время t_0 относительно начала.

Мы получим:

$$\begin{aligned} U_m(t - t_0) \cos[(\omega_0 + \Omega\lambda)t + \varphi] &= \\ &= U_m(t') \cos[(\omega_0 + \Omega\lambda)(t' + t_0) + \varphi] = \\ &= U_m(t') \cos[(\omega_0 + \Omega\lambda)t' + \omega_0 t_0 + \Omega\lambda t_0 + \varphi], \end{aligned} \quad (7.36)$$

где мы обозначили $t' = t - t_0$.

Как мы видим из последнего выражения, перенос огибающей равносильно тому, что начальная фаза под косинусом стала меняться с

изменением λ , что и дает изменение помехоустойчивости. Такую систему мы рассмотрим в § 7-9.

7.8. Частотная модуляция (частный случай)

В этом параграфе мы рассмотрим частный случай частотной модуляции, при котором сигналом является отрезок синусоиды с постоянной амплитудой, т. е.

$$\begin{aligned} A(\lambda, t) &= U_0 \cos[(\omega_0 + \Omega\lambda)t + \varphi], & \text{при } -\frac{\tau_0}{2} < t < \frac{\tau_0}{2}, \\ A(\lambda, t) &= 0 & \text{при } t < -\frac{\tau_0}{2} \text{ и } t > \frac{\tau_0}{2}. \end{aligned} \quad (7.37)$$

В этом случае огибающая будет выражаться так:

$$\begin{aligned} U_m(t) &= U_0, & \text{при } -\frac{\tau_0}{2} < t < \frac{\tau_0}{2}, \\ U_m(t) &= 0 & \text{при } t < -\frac{\tau_0}{2} \text{ и } t > \frac{\tau_0}{2}. \end{aligned} \quad (7.38)$$

Поэтому на основании общих формул (7.33) и (7.35) получим:

$$Q^2 = \frac{U_0^2}{2} \tau_0, \quad (7.39)$$

$$\delta_{cm}^2 = \frac{12\sigma^2}{\Omega^2 \tau_0^3 U_0^2} = \frac{6\sigma^2}{\Omega^2 \tau_0^2 Q^2}. \quad (7.40)$$

Поскольку при частотной модуляции удельная энергия сигнала не меняется с изменением передаваемой величины λ , линия сигнала, так же как и при время-импульсной модуляции, будет лежать на некоторой псевдосфере.

Сравнивая формулы (7.13) и (7.40) для время-импульсной и частотной модуляций, мы видели, что при этих модуляциях величина минимальной средней квадратической ошибки определяется теми же самыми выражениями. Однако входящие в эти выражения Ω и τ_0 имеют разное значение.

В формуле (7.13) Ω обозначает половину полосы, занимаемой сигналом. В формуле (7.40) Ω обозначает половину максимального изменения частоты сигнала. Можно приближенно считать, что полоса частот, потребная для передачи сигналов с частотной модуляцией, равняется максимальному изменению частоты сигнала. При этом условии Ω в обеих формулах будет обозначать половину полосы частот, необходимой для передачи сигналов.

В формуле (7.13) τ_0 обозначает максимальное смещение импульса сигнала по времени. В формуле (7.40) τ_0 обозначает длительность сигнала. Можно приближенно считать, что время, необходимое для передачи сигнала при время-импульсной модуляции, равняется максимальному смещению импульса по времени. При этом условии τ_0 в обеих формулах будет обозначать время, которое потребуется для передачи сигнала.

При этих условиях при передаче сигналами с время-импульсной и частотной модуляцией, которые занимают одно и то же время, одну и ту же полосу частот и имеют одну и ту же энергию, мы получим одну и ту же потенциальную помехоустойчивость.

Сравнивая две последние модуляции с амплитудной (§ 7.1), видим, что они обеспечивают большую помехоустойчивость в случае, если

$$\frac{\tau_0^2 \Omega^2}{3} > 1.$$

Рассмотренные для примера три случая модуляции далеко не исчерпывают всего их мыслимого разнообразия.

Мы видели, что для увеличения помехоустойчивости при амплитудной модуляции требовалось обязательно увеличение энергии сигнала.

При частотной и время-импульсной модуляции мы могли увеличивать помехоустойчивость при малых помехах, не увеличивая энергии сигнала, но для этого необходимо было увеличивать время или полосу частот, занимаемые сигналом.

В следующем параграфе мы рассмотрим такие способы увеличения помехоустойчивости при малых помехах, которые не требуют ни увеличения энергии сигнала, ни увеличения полосы частот, ни времени, занимаемых сигналом.

7.9. Повышение помехоустойчивости без увеличения энергии, длительности и ширины спектра сигнала

В этом параграфе мы рассмотрим системы, при которых можно теоретически беспрестанно увеличивать потенциальную помехоустойчивость при помехах с достаточно малой интенсивностью, не увеличивая при этом ни энергии сигнала, ни времени, ни полосы частот, им занимаемых.

Пусть передаваемый сигнал определяется выражением:

$$\begin{aligned} A(\lambda, t) &= U_0 \cos[(\omega_0 + \Omega\lambda)t + \varphi + a\lambda], & \text{при } -\frac{\tau_0}{2} < t < \frac{\tau_0}{2}, \\ A(\lambda, t) &= 0 & \text{при } t < -\frac{\tau_0}{2} \text{ и } t > \frac{\tau_0}{2}. \end{aligned} \quad (7.41)$$

Таким образом, этот сигнал отличается от разобранных ранее в случае частотной модуляции тем, что в нем фаза также меняется в зависимости от передаваемой величины.

Для этого сигнала получим:

$$A'_\lambda(\lambda, t) = -U_0(\Omega t + a) \sin[(\omega_0 + \Omega\lambda)t + \varphi + a\lambda]$$

при

$$-\frac{\tau_0}{2} < t < \frac{\tau_0}{2},$$

откуда

$$\begin{aligned} \overline{TA'_\lambda{}^2(\lambda, t)} &= U_0^2 \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} (\Omega t + a)^2 \sin^2[(\omega_0 + \Omega\lambda)t + \varphi + a\lambda] dt = \\ &= U_0^2 \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} \frac{1}{2} (\Omega t + a)^2 dt - U_0^2 \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} \frac{1}{2} (\Omega t + a)^2 \cos 2[(\omega_0 + \Omega\lambda)t + \varphi + a\lambda] dt. \end{aligned}$$

Второй интеграл при увеличении ω_0 будет стремиться к нулю, и поэтому им при достаточно большом значении ω_0 можно пренебречь. Мы получим:

$$\overline{TA'_\lambda{}^2(\lambda, t)} = \frac{U_0^2}{24} (\Omega^2 \tau_0^3 + 12\tau_0 a^2),$$

откуда минимальная средняя квадратическая ошибка, характеризующая потенциальную помехоустойчивость при данных сигналах, будет

$$\delta_{cm}^2 = \frac{12\sigma^2}{U_0^2 (\Omega^2 \tau_0^3 + 12\tau_0 a^2)} = \frac{6\sigma^2}{\tau_0 \Omega^2 Q^2 \left(1 + 12 \frac{a^2}{\Omega^2 \tau_0^2}\right)}. \quad (7.42)$$

Как видно из этой формулы, с увеличением a ошибку можно сделать сколь угодно малой. В то же время значение a не вызывает изменения ни энергии сигнала, ни полосы частот, ни времени, занимаемых сигналом.

Аналогичный результат получается, если менять фазу высокочастотного колебания пропорционально передаваемому параметру у сигнала с время-импульсной модуляцией, разобранный в § 7.3.

Получаемую в этих системах потенциальную помехоустойчивость на практике реализовать довольно трудно, так как для этого требуется приемник, реагирующий на начальную фазу высокочастотного колебания сигнала. Однако можно предложить системы модуляции, в которых большую помехоустойчивость практически реализовать будет легче. К таким системам относится, например, система с сигналом:

$$\begin{aligned} A(\lambda, t) &= U_0 [1 + \cos(\Omega_0 t + a\lambda)] \cos(\omega_0 + \Omega\lambda), \quad \text{при } -\frac{\tau_0}{2} < t < \frac{\tau_0}{2}, \\ A(\lambda, t) &= 0 \quad \text{при } t < -\frac{\tau_0}{2} \text{ и } t > \frac{\tau_0}{2}. \end{aligned} \quad (7.43)$$

Этот сигнал имеет то преимущество перед сигналами, рассмотренными выше, что в нем меняется фаза низкочастотного колебания, а не высокочастотного. Эта фаза будет меньше искажена при распространении сигнала и легче улавливается приемником.

Рассмотренные примеры далеко не исчерпывают всех возможных вариантов систем модуляции, помехоустойчивость которых при малых помехах может быть беспредельно увеличена.

Такие системы модуляции могут быть построены, например, на следующем общем принципе. Следует в зависимости от передаваемой величины λ менять в сигнале некоторый параметр, например некоторую фазу, беспредельное изменение которого не увеличивает отводимое сигналу место во времени и в частотном спектре, а также его энергию. Таким образом, этот параметр можно менять на сколь угодно большую величину и этим сколь угодно удлинять линию сигнала и понижать помехоустойчивость при малых помехах. Однако изменением одного этого параметра обычно ограничиться нельзя, так как он вызывает периодические изменения в сигнале и, таким образом, нескольким различным значениям параметра будет соответствовать один и тот же сигнал. Для ликвидации этой многозначности необходимо менять одновременно еще какой-либо другой параметр, например: частоту колебания, его амплитуду, положение импульса сигнала во времени и т. п. Это изменение приходится осуществлять в ограниченных пределах, поскольку оно обычно вызывает либо увеличение энергии сигнала, либо места, отводимого сигналу во времени или по частоте.

Недостаток рассмотренных в этом параграфе систем обнаруживается, если провести исследование их помехоустойчивости при помехах большой интенсивности, чему посвящена следующая глава. При этом оказывается, что чем больше мы повышаем помехоустойчивость методами, изложенными в этом параграфе, тем при меньшей интенсивности помехи наступает граница между «большой» и «малой» помехой. При «большой» же помехе выведенные формулы становятся неверными. В пределе изложенные тут способы позволяют свести погрешность, получаемую от воздействия «малых» помех, к нулю, но при этом «малыми» помехами должны будут считаться помехи, интенсивность которых также равна нулю. Таким образом, этими способами совершенно уничтожить действие помех, как и следовало ожидать, не удастся, — можно лишь получить уменьшение их влияния. Такое уменьшение бывает целесообразно в случае помех с достаточно малой интенсивностью и необходимости иметь очень малые ошибки при передаче.

Глава 8

ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ ПЕРЕДАЧЕ ОТДЕЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ ПРИ БОЛЬШИХ ПОМЕХАХ

8.1. Вывод общей формулы для оценки влияния помехи большой интенсивности

В этой главе мы произведем оценку потенциальной помехоустойчивости при передаче параметров и помехах с большой интенсивностью.

Обозначим через $P_{\lambda_a}(\lambda > \lambda_b)$ вероятность того, что при передаче значения параметра λ_a приемник вследствие наложения на сигнал помехи воспроизведет некоторый параметр λ , удовлетворяющий условию

$\lambda > \lambda_b$, и через $P_{\lambda_a}(\lambda < \lambda_b)$ вероятность того, что при передаче значения параметра λ_a вследствие наложения помехи приемное устройство воспроизведет параметр λ , удовлетворяющий условию $\lambda < \lambda_b$.

Очевидно, эта вероятность будет зависеть как от метода передачи, т. е. от функции $A(\lambda, t)$, так и от метода приема.

При принятых обозначениях вероятность того, что при передаче параметра λ_1 ошибка δ по абсолютной величине окажется больше ε , будет равна:

$$P_{\lambda_1}(\lambda < \lambda_1 + \varepsilon) + P_{\lambda_1}(\lambda < \lambda_1 - \varepsilon).$$

Будем считать, что передаваемый параметр λ_1 может принимать любое значение в пределах $-1, +1$ равновероятно. Тогда вероятность того, что λ_1 будет удовлетворять неравенству

$$\lambda_2 \leq \lambda_1 \leq \lambda_1 + d\lambda_2$$

и одновременно $|\delta| > \varepsilon$, будет равна:

$$[P_{\lambda_2}(\lambda > \lambda_2 + \varepsilon) + P_{\lambda_2}(\lambda < \lambda_2 - \varepsilon)] \frac{d\lambda_2}{2}.$$

Отсюда вероятность того, что при передаче некоторого, заранее неизвестного значения параметра λ_1 ошибка по абсолютной величине окажется больше ε , будет равна:

$$\begin{aligned} P(|\delta| > \varepsilon) &= \int_{-1}^{+1} [P_{\lambda_2}(\lambda > \lambda_2 + \varepsilon) + P_{\lambda_2}(\lambda < \lambda_2 - \varepsilon)] \frac{d\lambda_2}{2} = \\ &= \int_{-1}^{+1} P_{\lambda_2}(\lambda > \lambda_2 + \varepsilon) \frac{d\lambda_2}{2} + \int_{-1}^{+1} P_{\lambda_2}(\lambda < \lambda_2 - \varepsilon) \frac{d\lambda_2}{2}. \end{aligned}$$

Очевидно, значение интегралов не изменится, если в первом подставить величину $\lambda_0 = \lambda_2 + \varepsilon$, а во втором величину $\lambda_0 = \lambda_2 - \varepsilon$, изменив соответственно пределы интегрирования. Тогда мы получим:

$$\begin{aligned} P(|\delta| > \varepsilon) &= \int_{-1+\varepsilon}^{+1+\varepsilon} P_{\lambda_0-\varepsilon}(\lambda > \lambda_0) \frac{d\lambda_0}{2} + \int_{-1-\varepsilon}^{+1-\varepsilon} P_{\lambda_0+\varepsilon}(\lambda < \lambda_0) \frac{d\lambda_0}{2} \geq \\ &\geq \int_{-(1-\varepsilon)}^{1-\varepsilon} [P_{\lambda_0-\varepsilon}(\lambda > \lambda_0) + P_{\lambda_0+\varepsilon}(\lambda < \lambda_0)] \frac{d\lambda_0}{2}, \end{aligned}$$

так как тут подинтегральные выражения всегда положительны.

Оценим величину, стоящую в прямоугольных скобках, для чего несколько отвлечемся от сказанного выше. Пусть

$$A_1(t) = A(\lambda_0 - \varepsilon, t)$$

и

$$A_2(t) = A(\lambda_0 + \varepsilon, t)$$

являются двумя дискретными сигналами, которые были рассмотрены в гл. 4.

Пусть для приема этих сигналов используется рассмотренный приемник, служащий для определения параметра λ .

Будем считать, что пришел первый сигнал $A_1(t) = A(\lambda_0 - \varepsilon, t)$, если приемник воспроизведет $\lambda < \lambda_0$, и второй сигнал, если он воспроизведет $\lambda > \lambda_0$. Тогда вероятность искажения этих сигналов данным приемником, считая априорные вероятности их посылки одинаковыми, будет:

$$\frac{1}{2}P_{\lambda_0-\varepsilon}(\lambda > \lambda_0) + \frac{1}{2}P_{\lambda_0+\varepsilon}(\lambda < \lambda_0).$$

Однако эта вероятность искажения не может быть меньше вероятности искажения, определяющей потенциальную помехоустойчивость при данных сигналах, которая определяется выражением (4.8). Поэтому

$$\frac{1}{2}[P_{\lambda_0-\varepsilon}(\lambda > \lambda_0) + P_{\lambda_0+\varepsilon}(\lambda < \lambda_0)] \geq V(\alpha_1),$$

где α_1 определяется формулой (4.4) и в данном случае равно:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \sqrt{\frac{T}{2\sigma^2} [A(\lambda_0 + \varepsilon, t) - A(\lambda_0 - \varepsilon, t)]^2} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\sigma^2} \int_{-T/2}^{+T/2} [A(\lambda_0 + \varepsilon, t) - A(\lambda_0 - \varepsilon, t)]^2 dt}; \quad (8.1) \end{aligned}$$

$V(\alpha)$ определяется формулой (2.47).

Отсюда для оценки вероятности ошибок, больших ε , мы получаем универсальную формулу

$$P(|\delta| > \varepsilon) \geq \int_{-(1-\varepsilon)}^{1-\varepsilon} V(\alpha_1) d\lambda_0. \quad (8.2)$$

В ряде случаев α_1 не зависит от λ_0 . При этом условии подинтегральная величина будет постоянной, и мы получим:

$$P(|\delta| > \varepsilon) \geq 2(1 - \varepsilon)V(\alpha_1). \quad (8.3)$$

Из этих уравнений следует, что чем меньше будет расстояние

$$\sqrt{[A(\lambda_0 + \varepsilon, t) - A(\lambda_0 - \varepsilon, t)]^2}$$

между точками линии сигнала, которые соответствуют значениям параметра, отстоящим друг от друга на величину 2ε , тем больше вероятность получения ошибки δ , превышающей ε .

8.2. Сравнение формул для малых и больших помех

Сравним полученный в предыдущем параграфе результат с результатом, который мы получили в гл. 6 для случая малых помех.

Там нами была выведена формула (6.19), определяющая вероятность того, что при идеальном приемнике и малой помехе ошибка δ будет больше ε . Эта формула справедлива для заданного наименее вероятного значения λ_{xH} . Если же принять, что все λ_{xH} равновероятны, то для заранее неизвестного значения λ_{xH} мы получим следующее выражение для этой вероятности:

$$P(|\delta| > \varepsilon) = \int_{-1}^{+1} V(\alpha) d\lambda_{xH}, \quad (8.4)$$

где

$$\alpha = \frac{\sqrt{2TA'_\lambda{}^2(\lambda_{xH}, t)}}{\sigma} \varepsilon. \quad (8.5)$$

Сравним этот результат с результатом, даваемым формулой (8.2), являющейся универсальной и пригодной как для больших, так и для малых помех.

При малых ε мы можем принять:

$$A(\lambda_0 + \varepsilon, t) - A(\lambda_0 - \varepsilon, t) = A_\lambda(\lambda_0, t)2\varepsilon.$$

Подставляя это значение в формулу (8.1), мы получим:

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{2TA'_\lambda{}^2(\lambda_0, t)}}{\sigma} \varepsilon. \quad (8.6)$$

Эту величину мы должны подставить в формулу (8.2), дающую нижнюю границу для вероятности ошибок.

Из полученных формул мы видим, что $\alpha = \alpha_1$ и, значит, правые части выражений (8.2) и (8.4) будут отличаться лишь пределами интегрирования, причем разница в пределах будет стремиться к нулю, если $\varepsilon \rightarrow 0$.

Из этих выражений следует, что если неравенство (8.2) заменить на равенство, то оно даст значение вероятности малых ошибок, обеспечиваемых идеальным приемником при малых помехах.

8.3. Время-импульсная модуляция

При амплитудной и другой линейной модуляции полученные в гл. 7 формулы справедливы при помехах любой интенсивности, и поэтому их нет смысла исследовать методами § 8.1. Что касается время-импульсной модуляции, то это не так.

Для этой модуляции мы на основании формул (8.1), (7.9) и (2.26) получим:

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 &= \frac{TU_0^2}{2\sigma^2} \overline{\left\{ \frac{\sin \Omega \left[t - \frac{\tau_0}{2} (\lambda_0 + \varepsilon) \right]}{\Omega \left[t - \frac{\tau_0}{2} (\lambda_0 + \varepsilon) \right]} - \frac{\sin \Omega \left[t - \frac{\tau_0}{2} (\lambda_0 - \varepsilon) \right]}{\Omega \left[t - \frac{\tau_0}{2} (\lambda_0 - \varepsilon) \right]} \right\}^2 \cos^2 \omega_0 t =} \\ &= \frac{U_0^2}{4\sigma^2} \int_{-T/2}^{+T/2} \left\{ \frac{\sin \Omega \left[t - \frac{\tau_0}{2} (\lambda_0 + \varepsilon) \right]}{\Omega \left[t - \frac{\tau_0}{2} (\lambda_0 + \varepsilon) \right]} - \frac{\sin \Omega \left[t - \frac{\tau_0}{2} (\lambda_0 - \varepsilon) \right]}{\Omega \left[t - \frac{\tau_0}{2} (\lambda_0 - \varepsilon) \right]} \right\} dt. \quad (8.7) \end{aligned}$$

Беря этот интеграл, заменяя в нем пределы на $+\infty$ и $-\infty$ и, далее, вводя величину удельной энергии сигнала Q^2 , которая выражается формулой (7.12), мы получим:

$$\alpha_1^2 = \frac{\pi U_0^2}{2\sigma^2 \Omega} \left(1 - \frac{\sin \Omega \tau_0 \varepsilon}{\Omega \tau_0 \varepsilon} \right) = \frac{Q^2}{\sigma^2} \left(1 - \frac{\sin \Omega \tau_0 \varepsilon}{\Omega \tau_0 \varepsilon} \right). \quad (8.8)$$

Как мы видим, α_1 не зависит от λ_0 , и, значит, для подсчета вероятности ошибки можно применить формулу (8.3).

Кривая a, b, c, d, e на фиг. 8.1 дает зависимость величины, стоящей в скобках в формуле (8.8), от параметра $\Omega \tau_0 \varepsilon$, отложенного по оси абсцисс. Эта величина при заданном значении $\frac{\Omega}{\sigma}$ будет определять α_1 и $2V(\alpha_1)$. На этой же фигуре по оси ординат отложены еще пять шкал, по которым можно прямо найти величину $2V(\alpha_1)$ для значений $\frac{Q}{\sigma} = 1, 2, 3, 4, 6$.

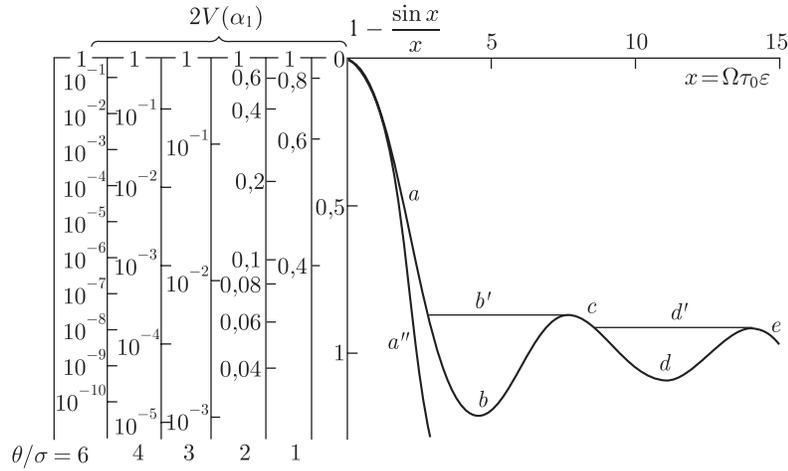
Так как величина $P(|\delta| > \varepsilon)$ должна при малых ε быть больше $2V(\alpha_1)$ и, кроме того, должна быть монотонно убывающей функцией от ε , то кривая, выражающая зависимость $P(|\delta| > \varepsilon)$ от ε , должна при $\varepsilon \ll 1$ лежать выше линии a, b', c, d', e , полученной из кривой a, b, c, d, e заполнением ее впадин. Это положение должно быть справедливо для любого способа приема, в том числе и идеального. Таким образом, значения вероятности $P(|\delta| > \varepsilon)$, характеризующей идеальный приемник, должны лежать выше линии a, b', c, d, e' .

Для малых помех, малых величин $\tau_0 \Omega \varepsilon$ и идеального приемника мы можем на основании формул (6.19) и (8.5) определить $P(|\delta| > \varepsilon)$. Эта величина изображена на фиг. 8.1 кривой a'' .

Как видно из рассмотрения фигуры, при $\tau_0 \Omega \varepsilon < 2, 2 \div 2, 7$ кривые a, b', c, d', e и a'' идут довольно близко. Однако при $\tau_0 \Omega \varepsilon > 2, 7$ мы получаем резкое расхождение между ними, причем кривая a'' оказывается ниже линий a, b', c, d', e , что, как говорилось, невозможно. Отсюда следует, что при $\tau_0 \Omega \varepsilon > 2, 7$ формула для малых помех и малых ошибок становится совершенно неприемлемой.

Поясним полученный результат.

При данном методе передачи и при методах приема, описанных в § 7.5 и 7.6, малые ошибки будут обуславливаться малыми помехами, которые вызывают перемещение склона импульса. Вероятность этого



Фиг. 8.1. Кривая a, b', c, d', e — нижняя граница для вероятности ошибки большей ε при время-импульсной и частотной модуляции и больших помехах для разных $\frac{Q}{\sigma}$ (ряд шкал по оси ординат); Q — удельная энергия сигнала; $\frac{\Omega}{\pi}$ — полоса частот; τ_0 — время, занимаемое сигналом; кривая a'' — вероятность того, что ошибка будет больше ε , полученной из формул для малых помех.

рода ошибки будет резко уменьшаться с увеличением ее величины. Большие ошибки будут получаться в том случае, если колебание помехи превзойдет напряжение порога U_n . Ясно, что это может случиться почти равновероятно в любой момент времени. Отсюда вероятность таких больших ошибок почти не будет убывать с их ростом. Это свойство, легко объяснимое для рассмотренного способа приема, является, как показывает фиг. 8.1, обязательным для данного метода передачи независимо от того, какой способ приема мы применим.

Большие ошибки, для которых несправедливы формулы, выведенные для малых помех в гл. 6, мы будем называть аномальными. Как мы видим из фиг. 8.1, аномальные ошибки должны начинаться, по крайней мере, с величины $\varepsilon = \frac{2,7}{\Omega\tau_0}$.

Из фигуры видно, что, например, при $\frac{Q}{\sigma} = 2$ вероятность наступления аномальной ошибки должна быть больше $6 \cdot 10^{-2}$. Это значит, что более чем в 6% случаев в среднем, при данном $\frac{Q}{\sigma}$ будут наступать аномальные ошибки. В общем виде вероятность наступления аномальных ошибок может быть найдена, исходя из того, что они возникают, начиная с $\tau_0\Omega\varepsilon > 2,7$. Таким образом, эти ошибки начинаются в соответствии с (8.8) при

$$\alpha^2 = \frac{Q^2}{\sigma^2} \left(1 - \frac{\sin 2,7}{2,7} \right) \approx \frac{Q^2}{\sigma^2}$$

и, значит, вероятность их будет равна:

$$P(\delta \text{ аномальная}) \geq 2V\left(\frac{Q}{\sigma}\right). \quad (8.9)$$

При малой интенсивности помехи вероятность аномальных ошибок будет очень мала, с ними можно не считаться и применять теорию малых помех.

8.4. Частотная модуляция

Приложим теперь результаты, полученные в этой главе, к случаю частотной модуляции, рассмотренной в § 7.7.

Мы имели сигнал, даваемый формулой (7.37).

Применяя к этому сигналу формулу (8.1) и учитывая (2.26), мы получим:

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 &= \frac{TU_0^2}{2\sigma^2} \overline{\{\cos[(\omega_0 + \Omega\lambda_0 + \Omega\varepsilon)t + \varphi_0] - \cos[(\omega_0 + \Omega\lambda_0 - \Omega\varepsilon)t + \varphi_0]\}^2} = \\ &= \frac{2TU_0^2}{\sigma^2} \overline{\sin^2 \Omega\varepsilon t \sin^2[(\omega_0 + \Omega\lambda_0)t + \varphi]} = \frac{U_0^2}{\sigma^2} \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} \sin^2 \Omega\varepsilon t dt. \end{aligned}$$

Беря этот интеграл и вводя величину удельной энергии сигнала Q^2 , в соответствии с формулой (7.39), будем иметь:

$$\alpha_1^2 = \frac{Q^2}{\sigma^2} \left(1 - \frac{\sin \Omega\tau_0\varepsilon}{\Omega\tau_0\varepsilon}\right). \quad (8.10)$$

Сравнивая эту формулу с формулой (8.8) для α_1^2 в случае время-импульсной модуляции, мы видим, что они друг от друга не отличаются. Поэтому все результаты, полученные для время-импульсной модуляции, применимы и для данного случая.

8.5. Система повышения помехоустойчивости без увеличения энергии, длительности и ширины спектра сигнала

В этом параграфе мы оценим помехоустойчивость при больших помехах системы, разобранный нами в § 7.9. Эта система позволяла беспредельно увеличивать помехоустойчивость при условии, что помехи достаточно малы.

Для этого случая сигнал определялся выражением (7.41), и мы, действуя совершенно аналогично предыдущему параграфу, получим;

$$\alpha_1^2 = \frac{Q^2}{\sigma^2} \left(1 - \frac{\sin \Omega\tau_0\varepsilon}{\Omega\tau_0\varepsilon} \cos 2a\varepsilon\right). \quad (8.11)$$

На фиг. 8.2 изображены кривые зависимости выражения, стоящего в скобках в этой формуле, от величины параметра $\tau_0\Omega\varepsilon$ для трех значений a :

кривая 1 для $a = 0$;

кривая 2 для $a = \Omega\tau_0$;

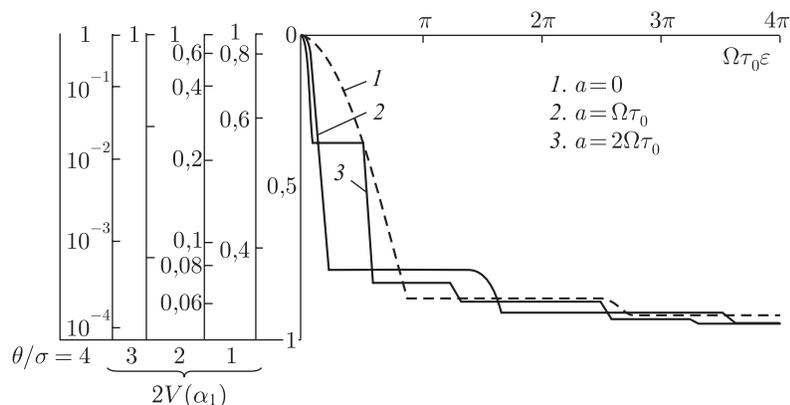
кривая 3 для $a = 2\Omega\tau_0$.

В этих кривых заполнены впадины по соображениям, изложенным в § 8.3.

Величина, стоящая в скобках формулы (8.11), будет при заданном отношении $\frac{Q}{\sigma}$ определять значения α_1 и $2V(\alpha_1)$. Последнее значение можно отсчитать и сразу по шкалам, отложенным по оси ординат фиг. 8.2.

Как было доказано, вероятность $P(|\delta| > \varepsilon)$ должна быть больше или равна значениям $2V(\alpha_1)$, если не считаться с множителем $1 - \varepsilon$ в формуле (8.3), причем при малых значениях ошибки ε , малых помехах и приеме на идеальный приемник она должна совпадать с этими значениями.

Как видно из приведенных кривых, с увеличением a помехоустойчивость при малых ε , т. е. малых ошибках, возрастает. Таким образом, в этих случаях кривые не ограничивают результатов, полученных в § 7.9 для этой системы модуляции.



Фиг. 8.2. Нижняя граница для вероятности ошибки, большей ε при сигналах даваемых формулой (7.41) для разных $\frac{Q}{\sigma}$. Кривая 1 — для $a = 0$, 2 — для $a = \Omega\tau_0$, 3 — для $a = 2\Omega\tau_0$, Q — удельная энергия; τ_0 — длительность; $\pm \frac{\Omega}{2\pi}$ — максимальное частотное отклонение сигнала

Но зато чем больше a , тем с меньших значений ε , как следует из фиг. 8.2, должны наступать аномальные ошибки и тем больше будут вероятности таких ошибок. Это доказывает положение, высказанное

в конце § 7.9 относительно недостатков данной и подобных систем модуляции.

Однако из этих кривых видно, что если не делать величину a слишком большой, то применение такой системы модуляции может оказаться целесообразным. Действительно, сравнивая кривые фиг. 8.2 для $a = 0$ и $a = \Omega\tau_0$, мы видим, что во втором случае при малых ε значение скобки в выражении (8.11) и, значит, величина α_1^2 будут в 10 раз больше, что сильно увеличит помехоустойчивость при малых помехах. Однако во втором случае аномальные ошибки должны начаться, как видно из фиг. 8.2, при значении скобки, равном 0,78, или еще раньше, в то время как в первом случае при значении 0,87. Поэтому вероятность наступления этих ошибок во втором случае будет больше величины

$$2V\left(\sqrt{0,78} \frac{Q}{\sigma}\right),$$

в то время как в первом она должна быть больше

$$2V\left(\sqrt{0,87} \frac{Q}{\sigma}\right).$$

Разница получается не столь существенной.

Если же мы перейдем к случаю, когда $a = 2\Omega\tau_0$, то при малых ε помехоустойчивость еще возрастет, но зато заметно увеличится вероятность аномальных ошибок. Она для этого случая будет больше

$$2V\left(\sqrt{0,36} \frac{Q}{\sigma}\right).$$

8.6. Геометрическое толкование результатов гл. 8

Неравенства (8.2) и (8.3) показывают, что чем меньше расстояние между точками линии сигнала, которые соответствуют значениям параметра, отличающимся на величину 2ε , тем меньше будет α_1 и тем больше должна быть вероятность того, что ошибка превзойдет величину ε . Таким образом, чем меньше это расстояние, тем меньше будет помехоустойчивость. Это положение вполне естественно, так как чем меньше расстояние между точками, соответствующими двум сигналам, тем больше вероятность, что эти сигналы вследствие наложения помехи и, значит, смещения точек будут перепутаны и неправильно воспроизведены приемником.

В примерах время-импульсной и частотной модуляций сначала α_1 и это расстояние увеличивались пропорционально ε , затем α_1 и расстояние перестали расти и с момента $\tau_0\Omega\varepsilon$ они (фиг. 8.1) начали даже уменьшаться.

Это свойство модуляции позволило удлинить линию сигнала и этим увеличить помехоустойчивость без увеличения энергии сигнала. Но это же вызвало появление аномальных ошибок.

Задача увеличения помехоустойчивости при малых помехах без увеличения энергии сигнала, его продолжительности и ширины спек-

тра занимаемых им частот в геометрическом толковании сводится к увеличению длины линии сигнала без того, чтобы эта линия выходила за пределы некоторой псевдосферы, радиус которой определяется максимальной заданной энергией сигнала, и без увеличения числа измерений рассматриваемого пространства.

Ясно, что в объеме любой такой псевдосферы можно расположить линию сигнала любой длины. Но с увеличением длины этой линии расстояние между отдельными «витками», отдельными отрезками этой линии должно обязательно уменьшаться, что должно вызвать увеличение вероятности аномальных ошибок.

Таким образом, подмеченный нами на частном примере закон, гласящий, что чрезмерное увеличение помехоустойчивости для малых помех без увеличения удельной энергии сигнала, ширины его спектра и его длительности должно обязательно сопровождаться увеличением вероятности аномальных ошибок, очевидно, справедлив и в общем случае.

Если мы будем увеличивать время или ширину спектра, занимаемые сигналом, то при этом будет увеличиваться число измерений пространства, в котором расположена линия сигнала. В этом случае можно увеличить длину этой линии, не выходя за пределы заданной псевдосферы и не сближая отдельные ее отрезки.

IV

ПЕРЕДАЧА КОЛЕБАНИЙ

Глава 9

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ВЛИЯНИЯ МАЛЫХ ПОМЕХ НА ПЕРЕДАЧУ КОЛЕБАНИЙ

9.1. Общие соображения

В ряде случаев техники связи приходится иметь дело не с передачей сообщений, могущих принимать дискретные значения, как это, например, имеет место в телеграфии, не с передачей отдельных значений параметров, как это, например, имеет место в телеметрии при передаче отдельных замеров, а с передачей некоторых функций времени, могущих непрерывно меняться и принимать бесчисленное количество форм, как это имеет, например, место в телефонии.

В части IV мы будем рассматривать этот последний тип передачи.

Для упрощения рассуждений мы будем предполагать, что передаваемое колебание (скажем, звук) является периодическим с периодом T (это всегда можно искусственно осуществить, взяв T достаточно большим) и что спектр частот этого колебания практически ограничен номерами гармоник от i_1 до i_2 .

В этом случае передаваемое колебание будем записывать так:

$$F(t) = \sum_{i=i_1}^{i_2} \left(\lambda_{2i-1} \sqrt{2} \sin \frac{2\pi}{T} it + \lambda_{2i} \sqrt{2} \cos \frac{2\pi}{T} it \right) = \sum_{l=l_1}^{l_2} \lambda_l I_l(t), \quad (9.1)$$

где λ_l — некоторые постоянные, определяющие колебание;

$I_l(t)$ — единичные ортогональные функции, определяемые формулами (2.14):

$$l_1 = 2i_1 - 1; \quad l_2 = 2i_2.$$

Для простоты мы будем считать в дальнейшем, что функция $F(t)$ принимает значения в пределах от $+1$ до -1 , не выходя за них.

Колебание (9.1) передается при помощи другого колебания, которое мы назовем сигналом. Передаваемое колебание у нас по условию было периодическое, поэтому можно считать, что и сигнал будет также периодическим. Поскольку передаваемое колебание (9.1) целиком определяется $l_2 - l_1 + 1$ — параметрами, то сигнал должен зависеть от этих параметров λ_l . Таким образом, сигнал в общем виде может быть представлен выражением

$$A(\lambda_{l_1}, \dots, \lambda_{l_2}; t). \quad (9.2)$$

Для сокращения письма мы запишем это выражение условно так:

$$A_F(t). \quad (9.3)$$

На сигнал будет накладываться помеха $W_{\mu,\nu}$, вследствие чего пришедшее колебание будет иметь вид:

$$X(t) = A_F(t) + W_{\mu,\nu}(t). \quad (9.4)$$

Будем считать, как и раньше, функцию $W_{\mu,\nu}$ периодической с тем же периодом T , что и период $A_F(t)$. Это, очевидно, можно всегда сделать, так как в обоих случаях на период накладывалось одно и то же требование: он должен быть достаточно большим.

На месте приема по колебанию $X(t)$ приемник должен восстановить функцию $F(t)$ с возможно большей точностью.

9.2. Влияние малых помех на передаваемые колебания

Как мы установили, передаваемое колебание определяется полностью параметрами $\lambda_1, \dots, \lambda_{l_2}$. Очевидно, приемник, воспроизводя функцию $F(t)$, этим самым будет воспроизводить данные параметры.

Представим колебание (9.4) так:

$$X(t) = \sum_{k=1}^n x_k C_k(t), \quad (9.5)$$

где $C_k(t)$ представляют некоторую систему единичных ортогональных функций.

Очевидно, воспроизводимые приемником параметры λ_l будут некоторыми функциями величин x_k , которые характеризуют приходящее колебание $X(t)$. Таким образом, можно записать:

$$\lambda_l = \Phi_l(x_1, \dots, x_n), \quad (9.6)$$

где $l = l_1, l_1 + 1, \dots, l_2$.

Вид этих функций зависит от системы модуляции и приемника.

Если приходящее колебание получит некоторое приращение

$$dX(t) = \sum_{k=1}^n C_k(t) dx_k, \quad (9.7)$$

то, очевидно, параметры λ_l получат приращения

$$d\lambda_l = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \Phi_l}{\partial x_k} dx_k = \overline{L_l(t) dX(t)}, \quad (9.8)$$

где обозначено:

$$L_l(t) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \Phi_l}{\partial x_k} C_k(t). \quad (9.9)$$

Предположим, что приемник при отсутствии помех правильно воспроизводит передававшееся колебание.

Пусть это колебание изменится так, что λ_l получит приращение $d\lambda_l$. При этом сигнал и, значит (поскольку помехи отсутствуют) колебания $X(t)$ должны получить приращение

$$dX(t) = D_l(t)d\lambda_l,$$

где мы обозначили:

$$D_l(t) = \frac{\partial A_F(t)}{\partial \lambda_l}. \quad (9.10)$$

Исходя из (9.8) и учитывая, что приемник должен воспроизвести переданное колебание без искажений, должно быть справедливо следующее равенство:

$$d\lambda_l = \overline{L_l(t)dX(t)} = \overline{L_l(t)D_l(t)d\lambda_l}$$

или

$$\overline{L_l(t)D_l(t)} = 1. \quad (9.11)$$

Остальные воспроизводимые параметры $\lambda_i (i \neq l)$ при этом не должны меняться и, значит,

$$d\lambda_i = \overline{L_i(t)dX(t)} = \overline{L_i(t)D_l(t)d\lambda_l} = 0,$$

откуда

$$\overline{L_i(t)D_l(t)} = 0, \quad (9.12)$$

если $i \neq l$.

Таким образом, для любого приемника, правильно воспроизводящего передаваемые колебания в отсутствие помех, должны удовлетворяться уравнения (9.11) и (9.12), в которых l — любое целое число от l_1 до l_2 .

Пусть теперь передано некоторое колебание, которое характеризуется параметрами λ_l . Пусть на сигнал, передающий это колебание, наложилась помеха $W_{\mu, \nu}$, достаточно малая по величине. Тогда под действием этой помехи пришедшее колебание получит приращение

$$dX(t) = W_{\mu, \nu}(t),$$

вследствие чего параметры воспроизведенного приемником колебания получат приращения

$$d\lambda_l = \overline{L_l(t)W_{\mu, \nu}(t)} = \frac{\sigma}{2T} \sqrt{L_l^2(t)} \theta \quad (9.13)$$

и будут равны $\lambda_l + d\lambda_l$.

Таким образом, приращения $d\lambda_l$ получаемые от действия помехи, будут случайными величинами, подчиняющимися закону Гаусса. Чем меньше

$$\sqrt{L_l^2(t)}, \quad (9.14)$$

(9.14) тем меньше будут эти приращения и, значит, ошибки, даваемые приемником.

Если мы выберем $L_l(t)$ такими, чтобы они удовлетворяли уравнениям (9.12) и (9.11) и в то же время значения (9.14) имели наименьшие возможные величины, то приемник, характеризующийся такими $L_l(t)$, будет давать наименьшие погрешности воспроизведения при достаточно малых помехах. В следующем параграфе мы найдем эти оптимальные значения $L_l(t)$ и далее покажем, что приемник, обладающий такими $L_l(t)$, по крайней мере принципиально, осуществим.

9.3. Условия идеального приемника

Найдем условия, каким должны удовлетворять $L_l(t)$, т. е. условия, каким должен удовлетворять приемник, чтобы малые помехи вызывали минимально возможные искажения в передаваемом колебании. Приемник, удовлетворяющий этим условиям, мы будем называть *идеальным*.

Мы рассмотрим случай, когда все

$$\left. \begin{aligned} D_l(t) &= \frac{\partial A_F(t)}{\partial \lambda_l} \\ \overline{D_{2i-1}^2(t)} &= \overline{D_{2i}^2(t)}. \end{aligned} \right\} \quad (9.15)$$

ортогональны между собой и

Этот случай имеет наибольший интерес, так как, как мы увидим, во всех практически применяемых системах модуляции эти условия удовлетворяются. Наличие этих условий сильно упростит дальнейшие рассуждения и конечные результаты.

Любая функция, в том числе и $L_l(t)$, может быть записана так:

$$L_l(t) = \frac{D_l(t)}{D_i^2(t)} + B_l(t), \quad (9.16)$$

где $B_l(t)$ — некоторая, пока неопределенная функция.

Подставляя эту величину в уравнение (9.11), мы получим:

$$\frac{\overline{D_l^2(t)}}{D_i^2(t)} + \overline{D_l(t)B_l(t)} = 1,$$

откуда

$$\overline{D_l(t)B_l(t)} = 0.$$

Подставляя выражение (9.16) в уравнение (9.12), мы получим

$$\frac{\overline{D_l(t)D_i(t)}}{D_i^2(t)} + \overline{D_l(t)B_i(t)} = 0.$$

Но так как $i \neq l$ и, значит, по условию $\overline{D_i(t)D_l(t)} = 0$, то должно быть:

$$\overline{D_l(t)B_i(t)} = 0.$$

Итак, чтобы $L_l(t)$ удовлетворяло уравнениям (9.11) и (9.12), необходимо и достаточно, чтобы каждое $B_i(t)$, $i = l_1, \dots, l_2$ было ортогонально всем $D_l(t)$ при $l = l_1, \dots, l_2$.

На основании (9.16) имеем:

$$\overline{L_l^2(t)} = \overline{\left[\frac{D_l(t)}{D_l^2(t)} + B_l(t) \right]^2} = \frac{1}{D_l^2(t)} + \overline{B_l^2(t)}, \quad (9.17)$$

поскольку, как мы выяснили, $D_l(t)$ и $B_l(t)$ должны быть ортогональны.

Полученное выражение будет, очевидно, минимальным, если

$$B_l(t) = 0.$$

Отсюда следует, что в идеальном приемном устройстве

$$L_l(t) = \frac{D_l(t)}{D_l^2(t)}, \quad (9.18)$$

где $D_l(t)$ определяется равенством (9.10).

9.4. Способ осуществления идеального приемника

Покажем, что приемник, который при приходе колебания $X(t)$, воспроизводит то значение функции, которое дает минимальную величину выражения

$$R = \overline{[X(t) - A_F(t)]^2}, \quad (9.19)$$

является идеальным в том смысле как это формулировано в предыдущем параграфе.

Действительно, при отсутствии помех и передаче некоторого колебания $F_0(t)$ мы, очевидно, будем иметь:

$$X(t) = A_{F_0}(t)$$

и выражение (9.19) примет минимальную возможную величину, равную нулю, в том случае, когда воспроизводимое приемником колебание $F(t)$ будет равно $F_0(t)$ и $A_F(t)$ и $A_{F_0}(t)$ будут совпадать. Таким образом, данный приемник не будет вносить искажений в отсутствие помех.

$F(t)$ и, значит, R являются функциями параметров λ_l . Мы условились, что колебание $F(t)$, воспроизводимое приемником, дает минимальное значение для выражения R . Поэтому частные производные от R по λ должны равняться нулю. Мы получим условие

$$\frac{\partial R}{\partial \lambda_l} = -2 \overline{[X(t) - A_F(t)] D_l(t)} = 0, \quad (9.20)$$

где

$$D_l(t) = \frac{\partial A_F(t)}{\partial \lambda_l}.$$

Пусть приходящее колебание получает некоторое малое приращение $\Delta X(t)$, тогда, очевидно, $A_F(t)$, $F(t)$ и λ_l также должны получить приращения, чтобы выражение R стало снова минимальным.

Пусть параметры λ_l получат при этом приращение $\Delta\lambda_l$. Тогда $A_F(t)$ получит приращение

$$\Delta A_F(t) = \sum_{l=l_1}^{l_2} D_l(t) \Delta\lambda_l, \quad (9.21)$$

и, значит, мы будем иметь:

$$R = [X(t) + \Delta X(t) - A_F(t) - \sum_{l=l_1}^{l_2} D_l(t) \Delta\lambda_l]^2. \quad (9.22)$$

Значения приращений $\Delta\lambda_l$ должны быть такими, чтобы выражение R имело снова минимальную величину. Поэтому частные производные R по $\Delta\lambda_l$ должны равняться нулю и, значит,

$$\frac{\partial R}{\partial \Delta\lambda_l} = -2 \left[X(t) + \Delta X(t) - A_F(t) - \sum_{l=l_1}^{l_2} D_l(t) \Delta\lambda_l \right] D_l(t) = 0.$$

Далее, принимая во внимание выражение (9.20) и то, что $D_l(t)$ с различными индексами ортогональны, мы получим:

$$\overline{\Delta X(t) D_l(t)} - \overline{D_l^2(t)} \Delta\lambda_l = 0,$$

откуда

$$\Delta\lambda_l = \frac{\overline{\Delta X(t) D_l(t)}}{\overline{D_l^2(t)}}. \quad (9.23)$$

Чем меньше $\Delta X(t)$ и $\Delta\lambda_l$, тем точнее будет выражение (9.21). Стремя эти величины к нулю, мы придем к условию, характеризуемому равенствами (9.8) и (9.18).

Итак, приемник, воспроизводящий то колебание $F(t)$, которое дает минимальное значение выражения R (9.19), при отсутствии помех не будет иметь искажений, а при наличии малых помех будет давать минимальные возможные искажения. Таким образом, этот приемник будет идеальным в установленном в §9.3 смысле.

9.5. Искажения при идеальном приеме

Определим теперь величину искажений, даваемых идеальным приемником под действием наложения на сигнал малых флюктуационных помех.

Пусть передавалось некоторое колебание

$$F_0(t) = \sum_{l=l_1}^{l_2} \lambda_{0l} I_l(t). \quad (9.24)$$

Тогда в отсутствие помех принятое колебание будет $X(t) = A_{F_0}(t)$. По нему идеальный приемник воспроизведет колебание $F_0(t)$, определяемое параметрами λ_{0l} . При наложении на сигнал малой помехи $W_{\mu,\nu}(t)$ приходящее колебание изменится на величину $dX(t) = W_{\mu,\nu}(t)$. При этом параметры λ_l , характеризующие колебание, которое воспроизведется идеальным приемником, получат приращение в соответствии с формулами (9.8) и (9.18):

$$d\lambda_l = \frac{D_l(t)dX(t)}{D_l^2(t)} = \frac{D_l(t)W_{\mu,\nu}(t)}{D_l^2(t)} = \frac{\sigma\theta_l}{\sqrt{2TD_l^2(t)}}. \quad (9.25)$$

Следует отметить, что случайные величины θ_l с различными индексами будут независимыми, поскольку $D_l(t)$ с различными индексами ортогональны.

Таким образом, воспроизведенное идеальным приемником колебание будет иметь вид:

$$F(t) = \sum_{l=l_1}^{l_2} (\lambda_{0l} + d\lambda_l) I_l(t) = F_0(t) + \sum_{l=l_1}^{l_2} \frac{\sigma\theta_l I_l(t)}{\sqrt{2TD_l^2(t)}} = F_0(t) + W^*(t), \quad (9.26)$$

где

$$W^*(t) = \sum_{i=i_1}^{i_2} \frac{\sigma}{\sqrt{TD_{2i}^2(t)}} \left(\theta_{2i-1} \sin \frac{2\pi}{T} it + \theta_{2i} \cos \frac{2\pi}{T} it \right).$$

Сравнивая это выражение с формулой (Г.3), мы видим, что под действием наложившейся на сигнал помехи при воспроизведении на переданное колебание $F_0(t)$ наложится нормально флюктуационное колебание $W^*(t)$ с интенсивностью на частоте $\frac{i}{T}$, равной:

$$\sigma^*\left(\frac{i}{T}\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{D_{2i-1}^2(t)}} = \frac{\sigma}{\sqrt{D_{2i}^2(t)}}, \quad (9.27)$$

где

$$D_l(t) = \frac{\partial A_F(t)}{\partial \lambda_l}.$$

Это нормально флюктуационное колебание мы в дальнейшем будем называть помехой на выходе приемника.

Полученная интенсивность колебания на выходе приемника является минимально возможной и характеризует потенциальную помехоустойчивость при данной системе модуляции.

В случае, если $\sigma^*\left(\frac{i}{T}\right)$ не будет зависеть от i , мы этот индекс будем опускать и писать σ^* .

9.6. Краткое резюме гл. 9

Приемник, дающий точное воспроизведение передававшегося колебания при отсутствии помехи и максимально приближающееся к передававшемуся при наличии малой помехи, мы назовем идеальным.

Идеальный приемник воспроизводит то колебание $F(t)$, которое дает минимум величины R (9.19).

При приеме на идеальный приемник при малой помехе воспроизведенное колебание будет отличаться от переданного на некоторое флюктуационное колебание с интенсивностью, даваемой выражением (9.27).

При этих выводах предполагалось, что функции

$$D_l(t) = \frac{\partial A_F(t)}{\partial \lambda_l}$$

для любой пары отличных индексов ортогональны и что

$$\overline{D_{2i-1}^2(t)} = \overline{D_{2i}^2(t)}.$$

Глава 10

ПРЯМЫЕ СИСТЕМЫ МОДУЛЯЦИИ

10.1. Определение

Под прямыми системами модуляции мы будем понимать системы, при которых передаваемое колебание (сообщение) $F(t)$ в качестве некоторого параметра непосредственно входит в выражение для сигнала. Сигнал в этом случае может быть записан в общем виде так:

$$A_F(t) = A[F(t), t]. \quad (10.1)$$

Примером прямых систем модуляции являются: амплитудная модуляция, при которой сигнал может быть записан так:

$$A_F(t) = U_0[1 + MF(t)] \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

фазовая модуляция, сигнал которой может быть записан так:

$$A_F(t) = U_0 \cos[\omega_0 t + mF(t) + \varphi_0]$$

и т. п.

Частотная модуляция, при которой передаваемый сигнал запишется так:

$$A_F(t) = U_0 \cos[\omega_0 t + \Omega \int F(t) dt]$$

по принятой в этой работе терминологии не будет относиться к прямым системам. Эту модуляцию мы назовем *интегральной*, поскольку в ней передаваемое колебание $F(t)$ входит под интеграл.

Передача одной боковой полосой частот тоже не будет являться прямой системой, поскольку и в этом случае нельзя аналитически выразить сигнал через передаваемое колебание $F(t)$.

В гл. 12 мы рассмотрим систему импульсной модуляции, которую мы также не будем относить к прямым системам.

10.2. Вывод общих формул

Поскольку передаваемое колебание $F(t)$ по условию может быть выражено формулой (9.1), мы для прямой системы модуляции сигнал можем записать:

$$A_F(t) = A[F(t), t] = A \left[\sum_{l=l_1}^{l_2} \lambda_l I_l(t), t \right],$$

откуда

$$D_l(t) = \frac{\partial A_F(t)}{\partial \lambda_l} = \frac{\partial A_F(t)}{\partial F} I_l(t).$$

Введем еще предположение, что функция $\left[\frac{\partial A_F(t)}{\partial F} \right]^2$ содержит синусоидальные составляющие лишь с частотами, большими, чем l_2/T , т. е. большими, чем максимальная удвоенная частота синусоидальных составляющих, содержащихся в передаваемом колебании $F(t)$.

Обычно это условие удовлетворяется.

Тогда на основании формулы (2.26) получим:

$$\left. \begin{aligned} \overline{D_l^2(t)} &= \overline{\left[\frac{\partial A_F(t)}{\partial F} \right]^2 I_l^2(t)} = \overline{\left[\frac{\partial A_F(t)}{\partial F} \right]^2} \\ &\text{и} \\ \overline{D_l(t) D_k(t)} &= \overline{\left[\frac{\partial A_F(t)}{\partial F} \right]^2 I_l(t) I_k(t)} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.2)$$

Из этих формул следует, что условия (9.15), наложенные на $D_l(t)$, в данном случае будут удовлетворяться, и мы можем воспользоваться формулами (9.26) и (9.27). Из этих формул будет следовать, что на выходе идеального приемника при прямой системе модуляции мы будем иметь, кроме переданного колебания $F(t)$, еще наложенное на него нормально флюктуационное колебание с равномерным спектром и интенсивностью в соответствии с формулой (10.2), равной:

$$\sigma^* = \frac{\sigma}{\sqrt{\left[\frac{\partial A_F(t)}{\partial F} \right]^2}}. \quad (10.3)$$

Надо считать, что это колебание будет содержать те же частоты, которые могут содержаться в колебании $F(t)$, так как лишние частоты с выхода приемника можно удалить фильтром.

10.3. Потенциальная помехоустойчивость при амплитудной и линейной модуляции

При амплитудной модуляции сигнал может быть представлен выражением

$$A_F(t) = U_0[1 + MF(t)] \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (10.4)$$

где M — коэффициент модуляции, поскольку мы условились считать, что

$$-1 \leq F(t) \leq +1.$$

Из этой формулы следует:

$$\frac{\partial A_F}{\partial F} = U_0 M \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (10.5)$$

Это колебание имеет высокую частоту $\frac{\omega_0}{2\pi}$, и, значит, поставленное в § 10.2 ограничение выполняется.

Далее,

$$\overline{\left[\frac{\partial A_F(t)}{\partial F} \right]^2} = \frac{U_0^2 M^2}{2},$$

поэтому при идеальном приемнике на его выходе мы будем иметь от помехи нормально флюктуационное колебание с интенсивностью

$$\sigma^* = \frac{\sqrt{2} \sigma}{U_0 M}. \quad (10.6)$$

Здесь и в дальнейшем предполагается, что усиление приемника подобрано так, что колебание от сигнала на его выходе имеет величину $F(t)$.

Для удобства сравнения с другими методами модуляции выразим в формуле (10.6) U_0 через эффективное значение напряжения сигналов, взятое для случаев

$$F(t) = 0 \text{ и } F(t) = \cos \Omega t.$$

При $F(t) = 0$ получим:

$$U_{\text{э0}}^2 = \overline{A^2(0, t)} = \frac{1}{2} U_0^2,$$

при $F(t) = \cos \Omega t$ получим

$$U_{\text{эм}}^2 = \overline{A^2(\cos \Omega t, t)} = \frac{1}{2} U_0^2 \left(1 + \frac{1}{2} M^2 \right),$$

откуда

$$\sigma^{*2} = \frac{\sigma^2}{M^2 U_{\text{э0}}^2} = \frac{\left(1 + \frac{M^2}{2} \right) \sigma^2}{M^2 U_{\text{эм}}^2}. \quad (10.7)$$

Максимальная помехоустойчивость получится при $M = 1$. В этом случае

$$\sigma^{*2} = \frac{\sigma^2}{U_{\text{э0}}^2} = \frac{3\sigma^2}{2U_{\text{эм}}^2}. \quad (10.8)$$

При линейной модуляции сигнал может быть записан так:

$$A_F(t) = U_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) + U_0 M F(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (10.9)$$

Разобранная выше амплитудная модуляция, так называемая квадратурная модуляция, а также передача без несущей частоты двумя боковыми полосами частот являются частными случаями линейной модуляции. Для этой модуляции, как нетрудно видеть, формула (10.5) будет также справедлива, и, значит, при ней на выходе идеального приемника, помимо передававшегося колебания $F(t)$, будет иметься нормально флюктуационное колебание, интенсивность которого определяется выражением (10.6).

10.4. Потенциальная помехоустойчивость при фазовой модуляции

При фазовой модуляции сигнал может быть записан так:

$$A_F(t) = U_0 \cos[\omega_0 t + mF(t)], \quad (10.10)$$

где m — индекс модуляции.

При таком сигнале мы получим:

$$\frac{\partial A_F(t)}{\partial F} = -U_0 m \sin[\omega_0 t + mF(t)],$$

откуда

$$\left[\frac{\partial A_F(t)}{\partial F} \right]^2 = \frac{U_0^2 m^2}{2} - \frac{U_0^2 m^2}{2} \cos[2\omega_0 t + 2mF(t)].$$

В случае, если ω_0 имеет достаточно большую величину, это колебание практически не будет иметь составляющих на низких частотах и, значит, для него условия (10.2) будут удовлетворяться.

Далее мы получим:

$$\overline{\left[\frac{\partial A_F(t)}{\partial F} \right]^2} = \frac{U_0^2 m^2}{2}$$

и, значит, на выходе идеального приемника, помимо передававшегося колебания $F(t)$ будет создаваться помехой нормально флюктуационное колебание с интенсивностью

$$\sigma^* = \frac{\sqrt{2} \sigma}{U_0 m}. \quad (10.11)$$

Для фазовой модуляции эффективное значение сигнала будет равно:

$$U_s^2 = \overline{A^2(0, t)} = \overline{A^2(\cos \Omega t, t)} = \frac{1}{2} U_0^2.$$

Вводя эти значения в формулу (10.11), мы получим:

$$\sigma^* = \frac{\sigma}{m U_s}. \quad (10.12)$$

Мы видим, что при фазовой модуляции потенциальная помехоустойчивость будет во столько раз больше потенциальной помехоустойчивости при амплитудной модуляции, во сколько раз m будет больше M . Поскольку при амплитудной модуляции M не может быть больше единицы, а при фазовой m может быть много больше единицы, мы можем при фазовой модуляции получить большую потенциальную помехоустойчивость, чем при амплитудной.

10.5. Помехоустойчивость при амплитудной модуляции и обычном приеме

Сравним полученную в § 10.3 потенциальную помехоустойчивость при амплитудной модуляции с помехоустойчивостью, которую дает при этом способе передачи обычный приемник.

Пусть перед детектором будет стоять фильтр, пропускающий частоты сигнала. Тогда на выходе фильтра напряжение помехи будет иметь вид, даваемый формулой (Б.6), и, значит, суммарное напряжение, действующее на детектор, будет равно:

$$U_0[1 + MF(t)] \cos \omega_0 t + \sqrt{2} W''_{1,n}(t) \cos \omega_0 t + \sqrt{2} W'_{1,n}(t) \sin \omega_0 t. \quad (10.13)$$

Амплитуда этого колебания будет равна:

$$U_m = \sqrt{\{U_0[1 + MF(t)] + \sqrt{2} W''_{1,n}(t)\}^2 + 2W'_{1,n}{}^2(t)}. \quad (10.14)$$

Если помеха достаточно мала по сравнению с сигналом, то величиной $W'_{1,n}{}^2(t)$ можно пренебречь по сравнению с квадратом фигурной скобки. Тогда получим:

$$U_m = U_0[1 + MF(t)] + \sqrt{2} W''_{1,n}(t). \quad (10.15)$$

Будем считать, что в приемнике используется линейное детектирование, тогда переменная составляющая на выходе детектора будет равна:

$$K[U_0MF(t) + \sqrt{2} W''_{1,n}(t)]. \quad (10.16)$$

В случае, если в приемнике используется синхронное детектирование, реагирующее лишь на косинусоидальную составляющую подаваемого на детектор напряжения (10.13), то этот результат будет точен и при большой интенсивности помехи.

Если усиление приемника подобрано так, что в отсутствие помехи колебание на его выходе будет равно $F(t)$, то при наличии помехи в соответствии с выражением (10.16) оно будет равно:

$$F(t) + \frac{\sqrt{2}}{MU_0} W''_{1,n}(t). \quad (10.17)$$

Поскольку $W''_{1,n}(t)$, как указывалось в приложении Б, является нормальным флюктуационным колебанием с интенсивностью σ , на выходе приемника на переданное колебание $F(t)$ будет накладываться нормальное флюктуационное колебание с интенсивностью

$$\sigma^* = \frac{\sqrt{2}\sigma}{MU_0}. \quad (10.18)$$

Таким образом, как видно, сравнивая выражения (10.18) и (10.6), в реальном приемнике и в идеальном влияние помех будет сказываться одинаково. Отсюда можно сделать вывод: при амплитудной модуляции обычный приемник с линейным детектором при малых помехах обеспечивает потенциальную помехоустойчивость. Таким образом, никакие усовершенствования при сигналах вида (10.4) и малых помехах не могут дать помехоустойчивость больше, чем это дает обычный приемник с линейным детектором.

Такой же результат получается и при исследовании других систем линейной модуляции — квадратурной модуляции и передачи двумя боковыми полосами частот без несущей. В этих случаях также оказывается, что нормально используемый при этих методах прием обеспечивает потенциальную помехоустойчивость.

10.6. Помехоустойчивость при фазовой модуляции и обычном приеме

При фазовой модуляции с сигналом, определяемым выражением (10.10), в приемнике после фильтра высокой или промежуточной частоты мы получим с учетом накладывающихся помех колебание

$$U_0 \cos[\omega_0 t + mF(t)] + \sqrt{2} W''_{1,n}(t) \cos \omega_0 t + \sqrt{2} W'_{1,n}(t) \sin \omega_0 t, \quad (10.19)$$

как это следует на основании приложения Б.

Для упрощения расчета мы рассмотрим лишь случай, когда передаваемое колебание мало и

$$mF(t) \ll 1.$$

В этом случае, при малых помехах, когда можно принять

$$W''_{1,n}(t) \ll U_0$$

и

$$W'_{1,n}(t) \ll U_0,$$

мы сумму колебаний (10.19) можем представить одним колебанием

$$U_m \cos[\omega_0 t + \varphi(t)],$$

в котором

$$\varphi(t) = mF(t) + \frac{\sqrt{2}}{U_0} W'_{1,n}(t).$$

Если это колебание подать на какой-то дискриминатор, который реагирует лишь на фазу и не реагирует на амплитуду, то после него, подбирая должным образом усиление, мы получим колебание

$$F(t) + \frac{\sqrt{2}}{mU_0} W'_{1,n}(t).$$

Поскольку $W'_{1,n}(t)$, как указывалось в приложении В, является нормальным флюктуационным колебанием с интенсивностью σ , после дискриминатора на передаваемое колебание $F(t)$ будет накладываться в этом случае нормальное флюктуационное колебание с интенсивностью

$$\frac{\sqrt{2}\sigma}{mU_0}. \quad (10.20)$$

Таким образом, как видно из сравнения выражений (10.20) и (10.11), рассмотренный тут метод приема будет обеспечивать потенциальную помехоустойчивость при малых помехах, по крайней мере во время небольших индексов модуляции.

10.7. Помехоустойчивость при передаче одной боковой полосой

В этом параграфе мы рассмотрим помехоустойчивость при передаче одной боковой полосой частот. Эта система передачи не относится к прямым системам и помещена в этой главе условно.

Найдем влияние помех при такой передаче и приеме на идеальный приемник.

При передаче колебания

$$F(t) = \sum_{i=i_1}^{i_2} \left(\lambda_{2i-1} \sqrt{2} \sin \frac{2\pi}{T} it + \lambda_{2i} \sqrt{2} \cos \frac{2\pi}{T} it \right)$$

при помощи одной верхней полосы частот сигнал будет выглядеть так

$$A_F(t) = U_0 \sum_{i=i_1}^{i_2} \left[\lambda_{2i-1} \sqrt{2} \sin \left(\frac{2\pi}{T} i + \omega_0 \right) t + \lambda_{2i} \sqrt{2} \cos \left(\frac{2\pi}{T} i + \omega_0 \right) t \right], \quad (10.21)$$

где $\frac{\omega_0}{2\pi}$ — несущая частота.

Отсюда получим:

$$D_{2i-1}(t) = U_0 \sqrt{2} \sin \left(\frac{2\pi}{T} i + \omega_0 \right) t,$$

$$D_{2i}(t) = U_0 \sqrt{2} \cos \left(\frac{2\pi}{T} i + \omega_0 \right) t.$$

Поэтому

$$\overline{D_{2i-1}^2(t)} = \overline{D_{2i}^2(t)} = U_0^2$$

и

$$\overline{D_i(t)D_j(t)} = 0$$

при $i \neq j$.

Таким образом, к данному случаю применима общая формула (9.27), на основании которой интенсивность помехи на выходе идеального приемника будет равна:

$$\sigma^* = \frac{\sigma}{\sqrt{\overline{D_i^2(t)}}} = \frac{\sigma}{U_0^2}. \quad (10.22)$$

При приеме на приемник, обычно используемый для приема одной боковой полосы, получим такую же помехоустойчивость.

Глава 11

ИМПУЛЬСНЫЕ СИСТЕМЫ МОДУЛЯЦИИ

11.1. Определение

Под импульсными системами модуляции мы будем понимать такие системы, при которых вместо непрерывной передачи некоторого колебания $F(t)$ при помощи сигнала $A_F(t)$ мы будем передавать лишь отдельные мгновенные значения этого колебания:

$$\dots F(-2\tau), F(-\tau), F(0), F(\tau), F(2\tau) \dots, \quad (11.1)$$

взятые для моментов времени, отстоящих друг от друга на величину τ .

Передачу этих мгновенных значений мы будем осуществлять при помощи отдельных, следующих друг за другом сигналов-импульсов.

При этом может быть использован любой из способов передачи отдельных значений параметров, рассмотренных в части III. В данном случае передаваемыми величинами будут являться мгновенные значения (11.1).

Для передачи мгновенного значения $F(0)$ мы будем использовать некоторый сигнал $A(\mu_0, t)$, начинающийся при $t = 0$, полагая в нем $\mu_0 = F(0)$. Для передачи мгновенного значения $F(k\tau)$ мы будем передавать аналогичный сигнал $A(\mu_k, t - \tau k)$, который будет начинаться при $t = \tau k$ и в котором

$$\mu_k = F(k\tau). \quad (11.2)$$

Таким образом, передачу колебания $F(t)$ мы будем осуществлять при помощи некоторого сигнала

$$A_F(t) = \sum_{k=-\frac{T}{2\tau}}^{\frac{T}{2\tau}-1} A(\mu_k, t - \tau k). \quad (11.3)$$

Пределы в этой сумме взяты на основании того, что все рассматриваемые в этой работе процессы должны укладываться в интервале $(-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2})$. Мы считаем, что T выбрано так, что $\frac{T}{2\tau}$ является целым числом.

11.2. Пример осуществления импульсной системы модуляции

Рассмотрим один из возможных примеров осуществления импульсной системы передачи и приема и выясним на нем основное соотношение, при котором эта система осуществима.

Способ получения импульсных сигналов в передатчике принципиально весьма прост. Он может быть схематически осуществлен так: какой-то переключатель замыкает в моменты времени, кратные τ , цепь, в которой действует э. д. с, пропорциональная передаваемому колебанию $F(t)$. Тогда в этой цепи пойдут импульсы тока, величина которых будет пропорциональна мгновенным значениям (11.1). Эти импульсы тока будут воздействовать на модулятор, меняя форму посылаемых к месту приема высокочастотных импульсов хотя бы одним из способов, рассмотренных в части III.

По пришедшим на приемник высокочастотным импульсам вначале восстанавливаются передававшиеся с передатчика мгновенные значения (значения (11.1) и создаются короткие импульсы, величина которых пропорциональна этим мгновенным значениям.

Эти короткие импульсы могут быть записаны так:

$$F(k\tau)\Phi(t - k\tau).$$

Общее напряжение от всех этих импульсов будет:

$$\sum_{k=-\frac{T}{2\tau}}^{\frac{T}{2\tau}-1} F(k\tau)\Phi(t - k\tau). \quad (11.4)$$

При этом мы не учитываем возможное постоянное запаздывание импульсов на приеме от импульсов на передаче.

Будем считать, что $F(t)$ — непрерывная функция и что

$$\Phi(t) = 0$$

при $t < 0$ и при $t > +\varepsilon$.

Тогда со сколь угодно большой точностью будет справедливо равенство

$$F(k\tau)\Phi(t - k\tau) = F(t)\Phi(t - k\tau),$$

если ε — достаточно малая величина.

Действительно, $\Phi(t - k\tau)$ будет отлично от нуля лишь для значений t , лежащих в сколь угодно малой области $k\tau, k\tau + \varepsilon$, для которой можно считать, что $F(t) = F(k\tau)$.

Учитывая это обстоятельство, мы можем выражение (11.4) записать так:

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\frac{T}{2\tau}}^{\frac{T}{2\tau}-1} F(t)\Phi(t - k\tau) &= F(t) \sum_{k=-\frac{T}{2\tau}}^{\frac{T}{2\tau}-1} \Phi(t - k\tau) = \\ &= F(t)d_0 + F(t)d_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) + F(t)d_2 \cos(2\omega_0 t + \varphi_2) + \dots, \end{aligned} \quad (11.5)$$

где $\omega_0 = \frac{2\pi}{\tau}$; d_0, d_1, d_2, \dots — некоторые постоянные величины.

Последнее выражение получается, если разложить сумму:

$$\sum_{k=-\frac{T}{2\tau}}^{\frac{T}{2\tau}-1} \Phi(t - k\tau), \quad (11.6)$$

являющуюся периодической функцией с периодом τ , в ряд Фурье.

Пусть наивысшая частота, входящая в колебание $F(t)$, будет $f_{\text{макс}}$.

Очевидно, наивысшая частота, входящая в первый член ряда, будет равна этой же величине. Второй член ряда является амплитудно модулированным колебанием и может быть разложен на синусоидальные составляющие несущей и боковых частот, причем наинизшая частота этих составляющих, очевидно, будет равна $\frac{\omega_0}{2\pi} - f_{\text{макс}}$. У третьего члена

наинизшая частота, очевидно, будет равна $\frac{2\omega_0}{2\pi} - f_{\text{макс}}$ и т. д.

Очевидно, первую слагаемую выражения (11.5) можно будет полностью отделить фильтром от остальных составляющих по частотному признаку и, значит, получить $F(t)$, если наивысшая частота первого члена $f_{\text{макс}}$ будет меньше наинизшей частоты, входящей в остальные члены, т. е. если

$$f_{\text{макс}} < \frac{\omega_0}{2\pi} - f_{\text{макс}} \quad (11.7)$$

или

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\omega_0}{2\pi} > 2f_{\text{макс}}, \quad (11.8)$$

или

$$\tau < \frac{1}{2f_{\text{макс}}}. \quad (11.9)$$

Таким образом, по импульсам функции (11.4) при помощи фильтра или гармонического анализа можно восстановить

описанным способом колебание $F(t)$, если только частота импульсов больше двойной максимальной частоты, входящей в колебание $F(t)$ или, что то же, если расстояние между импульсами τ меньше, чем половина наименьшего периода синусоидального колебания, входящего в $F(t)$.

11.3. Потенциальная помехоустойчивость при импульсной системе модуляции

Определим теперь потенциальную помехоустойчивость импульсной системы модуляции, исходя из выражения (11.3) и общей формулы (9.27).

Получим:

$$D_l(t) = \frac{\partial A_F(t)}{\partial \lambda_l} = \sum_{k=-\frac{T}{2\tau}}^{\frac{T}{2\tau}-1} \frac{\partial A(\mu_k, t - \tau k)}{\partial \mu_k} \frac{\partial F(k\tau)}{\partial \lambda_l}. \quad (11.10)$$

Будем считать, что импульсы $A(\mu_k, t - k\tau)$ с различными k не перекрываются между собой, так что для каждого момента времени t лишь одно из слагаемых суммы (11.10) может отличаться от нуля. В этом случае отдельные слагаемые этой суммы будут ортогональны, и мы получим:

$$\overline{D_m(t)D_l(t)} = \sum_{k=-\frac{T}{2\tau}}^{\frac{T}{2\tau}-1} \overline{\left[\frac{\partial A(\mu_k, t - k\tau)}{\partial \mu_k} \right]^2} \frac{\partial F(k\tau)}{\partial \lambda_m} \frac{\partial F(k\tau)}{\partial \lambda_l} \quad (11.11)$$

Далее, очевидно,

$$\overline{\left[\frac{\partial A(\mu_k, t - k\tau)}{\partial \mu_k} \right]^2} = \overline{\left[\frac{\partial A(\mu_k, t)}{\partial \mu_k} \right]^2} = \overline{A|\mu'|^2(\mu, t)}. \quad (11.12)$$

Мы будем считать в целях упрощения, что эта величина не зависит от значения μ , как это, например, имело место во всех примерах, разобранных в части III.

В тех случаях, когда эта величина зависит от значения μ , интенсивность колебания помехи на выходе приемника будет зависеть от передаваемого колебания $F(t)$ и вычисление этой интенсивности усложняется. Однако если в этом случае отыскивать интенсивность помехи на выходе приемника при $F(t) = 0$, то проводимые вычисления будут справедливы; нужно только вместо выражения $\overline{A|\mu'|^2(\mu, t)}$ брать его значение для $\mu = 0$.

Учитывая (11.12), получим:

$$\overline{D_m(t)D_l(t)} = \overline{A|\mu'|^2(\mu, t)} \sum_{k=-\frac{T}{2\tau}}^{\frac{T}{2\tau}-1} \frac{\partial F(k\tau)}{\partial \lambda_m} \frac{\partial F(k\tau)}{\partial \lambda_l}. \quad (11.13)$$

Далее, из формулы (9.1) получаем при четных l и m

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F(k\tau)}{\partial \lambda_{2i}} &= \sqrt{2} \cos \frac{2\pi}{T} ik\tau \\ \frac{\partial F(k\tau)}{\partial \lambda_{2i-1}} &= \sqrt{2} \sin \frac{2\pi}{T} ik\tau. \end{aligned} \right\} \quad (11.14)$$

и при нечетных

Подставляя эти выражения в сумму (11.13), мы получим:

$$\overline{D_m(t)D_l(t)} = 0 \quad \text{при } m \neq l$$

и

$$\overline{D_l^2(t)} = \frac{TA_\mu^2(\mu, t)}{\tau}. \quad (11.15)$$

Таким образом, на выходе идеального приемника мы на основании формулы (9.27) получим, кроме воспроизведенного колебания $F(t)$, еще наложенное на него флюктуационное колебание со среднеквадратичным спектром, равным:

$$\sigma^* = \frac{\sigma\sqrt{\tau}}{\sqrt{TA_\mu^2(\mu, t)}}. \quad (11.16)$$

На основании § 6.6 мы знаем, что при передаче некоторого параметра μ при помощи сигнала $A(\mu, t)$ мы при приеме на идеальный приемник получим минимально возможную среднюю квадратичную ошибку δ_{cm} , определяемую формулой (6.40). Из сопоставления этих формул следует, что интенсивность помехи на выходе приемника может быть выражена так:

$$\sigma^{*2} = 2\tau\delta_{cm}^2. \quad (11.17)$$

Как мы видим, нормальное флюктуационное колебание, вызванное наложением помехи, на выходе идеального приемника будет иметь равномерную интенсивность, как и при прямых методах модуляции. Интенсивность этого колебания будет тем больше, чем больше минимальная средняя квадратичная ошибка δ_{cm} при передаче мгновенных значений $F(k\tau)$ передаваемого колебания.

Таким образом, вопрос о повышении потенциальной помехоустойчивости при импульсной системе модуляции сводится к уменьшению минимальной средней квадратической ошибки, получаемой при передаче мгновенных значений. Все сказанное об этом в части III пригодно для данного случая.

Уменьшая τ , т. е. увеличивая число импульсов сигнала, мы будем уменьшать σ^* , однако при этом средняя мощность сигнала будет увеличиваться.

Для дальнейшего еще будет необходимо знание эффективного значения сигнала $U_{э0}$ при $F(t) = 0$. При импульсной модуляции на основании формулы (11.3) оно будет определяться так:

$$\begin{aligned} U_{э0}^2 = \overline{A_F^2(t)} &= \overline{\left[\sum_{k=-\frac{T}{2\tau}}^{\frac{T}{2\tau}-1} A(0, t - k\tau) \right]^2} = \\ &= \sum_{k=-\frac{T}{2\tau}}^{\frac{T}{2\tau}-1} \overline{A^2(0, t - k\tau)} = \frac{T \overline{A^2(0, t)}}{\tau}. \end{aligned} \quad (11.18)$$

Здесь мы учли, что колебания отдельных импульсов не перекрываются и поэтому, как это указывалось, будут ортогональны.

11.4. Помехоустойчивость приемника, разобранный в § 11.2

В этом параграфе мы исследуем помехоустойчивость приемника импульсной модуляции, принцип работы которого был рассмотрен в § 11.2, и сравним эту помехоустойчивость с потенциальной. При этом мы будем считать, что первая часть рассмотренного приемника, воспроизводящая мгновенные значения по приходящим сигналам, работает идеально.

В § 6.5 было показано, что при наложении на сигнал малых помех передаваемые величины должны воспроизводиться идеальным приемником с ошибками, которые в соответствии с формулами (6.28), (6.36) и (6.38), в данном случае для k -того импульса будут равны:

$$\delta_k = \overline{L_k(t) W_{\mu, \nu}(t)} = \delta_{cm} \theta_k, \quad (11.19)$$

где

$$L_k(t) = \frac{A'_\mu(\mu, t - k\tau)}{A'^2_\mu(\mu, t - k\tau)},$$

θ_k — нормальная случайная величина; $\delta_{cm} = \frac{\sigma}{\sqrt{2T A'^2_\mu(\mu, t - k\tau)}}$ — средняя квадратичная ошибка при идеальном приемнике.

Так как импульсы, служащие для передачи различных мгновенных значений, по условию практически не накладываются друг на друга, то $L_k(t)$ с различными индексами будут ортогональны между собой. Поэтому в соответствии с (2.60) и (2.61) θ_k будут взаимно независимы. Далее, поскольку мы в § 11.3 приняли, что $A'^2_\mu(\mu, t - k\tau)$ от μ не зависит, получим, что величины $\overline{L_k^2(t)}$ и значит, δ_{cm} от μ также зависеть не будут.

Приемник под действием помехи будет вместо мгновенных значений $F(k\tau)$ воспроизводить значения $F(k\tau) + \delta_{cm} \theta_k$.

При восстановлении по этим значениям колебания $F(t)$ мы образуем в соответствии с §11.2 систему коротких импульсов, которая в данном случае будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\frac{T}{2\tau}}^{\frac{T}{2\tau}-1} [F(k\tau) + \delta_{cm}\theta_k]\Phi(t - k\tau) = \\ = \sum_{k=-\frac{T}{2\tau}}^{\frac{T}{2\tau}-1} F(k\tau)\Phi(t - k\tau) + \delta_{cm} \sum_{k=-\frac{T}{2\tau}}^{\frac{T}{2\tau}-1} \theta_k\Phi(t - k\tau). \end{aligned} \quad (11.20)$$

Если в полученном выражении оставить лишь колебания, частоты которых меньше $\frac{1}{2\tau}$, то, как было доказано в §11.2, первый член этого выражения будет равен величине $d_0F(t)$, где d_0 — некоторая постоянная.

Покажем, что при этих условиях второй член будет равен нормальному флюктуационному колебанию, интенсивность которого для частот от 0 до $\frac{1}{2\tau}$ равна:

$$\sqrt{2\tau} \delta_{cm} d_0. \quad (11.21)$$

Найдем косинусоидальную составляющую второго члена на частоте $\frac{n}{T}$; она будет равна:

$$\begin{aligned} C_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \delta_{cm} \sum_{k=-\frac{T}{2\tau}}^{\frac{T}{2\tau}-1} \theta_k \Phi(t - k\tau) \cos \frac{2\pi}{T} n t dt = \\ = \frac{2\delta_{cm}}{T} \sum_{k=-\frac{T}{2\tau}}^{\frac{T}{2\tau}-1} \theta_k \int_{-T/2}^{+T/2} \Phi(t - k\tau) \cos \frac{2\pi}{T} n t dt. \end{aligned}$$

Поскольку $\Phi(t - k\tau)$ отлично от нуля только в непосредственной близости от $t = k\tau$, то

$$\int_{-T/2}^{+T/2} \Phi(t - k\tau) \cos \frac{2\pi}{T} n t dt = a \cos \frac{2\pi}{T} n k\tau,$$

где

$$a = \int_{-T/2}^{+T/2} \Phi(t - k\tau) dt = \int_{-T/2}^{+T/2} \Phi(t) dt, \quad (11.22)$$

таким образом,

$$C_n = \frac{2\delta_{cm}}{T} a \sum_{k=-\frac{T}{2\tau}}^{\frac{T}{2\tau}-1} \theta_k \cos \frac{2\pi}{T} nk\tau.$$

Учитывая, что θ_k — независимые нормальные случайные величины, на основании формулы (2.74) получим:

$$C_n = \frac{2\delta_{cm}}{T} a \sqrt{\frac{T}{2\tau}} \theta_{cn}, \quad (11.23)$$

где θ_{cn} — нормальная случайная величина, поскольку

$$\sum_{k=-\frac{T}{2\tau}}^{\frac{T}{2\tau}-1} \cos^2 \frac{2\pi}{T} nk\tau = \sum_{k=-\frac{T}{2\tau}}^{\frac{T}{2\tau}-1} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{4\pi}{T} nk\tau \right) = \frac{T}{2\tau},$$

так как сумма косинусов при $\frac{n}{T} < \frac{1}{2\tau}$ будет равна нулю.

Аналогично амплитуда синуса на частоте $\frac{n}{T}$ будет равна:

$$S_n = \frac{2\delta_{cm}}{T} a \sqrt{\frac{T}{2\tau}} \theta_{sn}. \quad (11.24)$$

На основании § 2.5 нетрудно доказать, что случайные величины θ_{c1} , θ_{s1} , θ_{c2} , θ_{s2} , ... будут взаимно независимы.

Найдем еще величину d_0 , которая является постоянной составляющей ряда (11.6). Она будет равна:

$$d_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \sum_{k=-\frac{T}{2\tau}}^{\frac{T}{2\tau}-1} \Phi(t - k\tau) dt = \frac{1}{T} \frac{T}{\tau} a, \quad (11.25)$$

откуда $a = \tau d_0$.

Принимая во внимание все сказанное, мы получим, оставляя во втором слагаемом колебания (11.20) лишь составляющие с частотами, меньшими $\frac{1}{2\tau}$, колебание

$$W_{1, \frac{T}{2\tau}-1}(t) = \delta_{cm} d_0 \sqrt{\frac{2\tau}{T}} \sum_{n=1}^{\frac{T}{2\tau}-1} \left(\theta_{cn} \cos \frac{2\pi}{T} nt + \theta_{sn} \sin \frac{2\pi}{T} nt \right), \quad (11.26)$$

которое, как это следует из сравнения с формулой (2.54), является нормально флюктуационным колебанием с постоянной интенсивностью, равной (11.21), что и требовалось доказать.

Если теперь мы подберем усиление приемника таким, чтобы в отсутствие помех колебание на его выходе было $F(t)$, то, очевидно, дополнительное колебание, которое будет накладываться на выходное

при наличии помех, будет нормально флюктуационным с интенсивностью

$$\sigma^* = \sqrt{2\tau} \delta_{cm}. \quad (11.27)$$

Сравнивая этот результат с тем, что мы получили в § 11.3, исследуя потенциальную помехоустойчивость, мы приходим к выводу, что способ приема, разобранный в § 11.2, обеспечивает потенциальную помехоустойчивость, если в нем для воспроизведения передававшихся мгновенных значений используется идеальный приемник.

В случае, если для этих целей используется приемник неидеальный, то средняя квадратическая ошибка при воспроизведении мгновенных значений δ_c будет больше δ_{cm} и во столько же раз возрастет интенсивность помехи на выходе приемника по сравнению с идеальным случаем.

11.5. Потенциальная помехоустойчивость при амплитудно-импульсной модуляции

Отдельные импульсы при амплитудно-импульсной модуляции будут выражаться формулой (7.1). Интенсивность помехи на выходе идеального приемника в соответствии с формулами (7.2) и (11.17) будет:

$$\sigma^{*2} = \frac{\tau \sigma^2}{TB^2(t)}. \quad (11.28)$$

Для удобства сравнения с другими модуляциями заменим в этой формуле $B^2(t)$ эффективным значением сигнала. В соответствии с формулами (7.1) и (11.18) получим:

$$U_{\text{э0}}^2 = \frac{TA^2(0, t)}{\tau} = \frac{TB^2(t)}{\tau}. \quad (11.29)$$

Вводя эти величины в формулу (11.28), мы получим:

$$\sigma^* = \frac{\sigma}{U_{\text{э0}}}. \quad (11.30)$$

Сравним полученное значение интенсивности колебания помехи на выходе идеального приемного устройства с той же величиной для обычной амплитудной модуляции, разобранный в § 10.3 и характеризуемой формулой (10.8). Как видно из сравнения, интенсивность помехи на выходе и, значит, потенциальная помехоустойчивость обеих систем будет одна и та же.

Мы видели в § 10.5, что реализовать потенциальную помехоустойчивость при амплитудной модуляции при малых помехах можно при помощи обычного приемника, поэтому система с амплитудно-импульсной модуляцией не может при тех же средних мощностях сигнала обеспечить лучшую помехозащиту, чем обычная амплитудная модуляция, ни при каком приемнике, по крайней мере при малых помехах и при условиях, когда метод приема, рассмотренный в § 10.5, осуществим.

11.6. Потенциальная помехоустойчивость при время-импульсной модуляции

Пусть в этом случае сигнал будет выражаться формулой (7.9.) На основании формул (7.11) и (11.17) интенсивность помехи на выходе идеального приемного устройства будет равна:

$$\sigma^{*2} = \frac{24\tau\sigma^2}{\pi\tau_0^2\Omega U_0^2}. \quad (11.31)$$

Выразим эту величину через $U_{\text{э0}}^2$. Воспользуемся формулой (11.18). Для этого случая

$$\overline{TA^2(\mu, t)} = \frac{\pi}{2\Omega} U_0^2,$$

откуда

$$U_{\text{эм}}^2 = U_{\text{э0}}^2 = U_{\text{э}}^2 = \frac{\pi U_0^2}{2\Omega\tau}. \quad (11.32)$$

Принимая во внимание это значение, мы для время-импульсной модуляции получим:

$$\sigma^{*2} = \frac{12\sigma^2}{\Omega^2\tau_0^2 U_{\text{э}}^2}. \quad (11.33)$$

Как видно, помехоустойчивость будет повышаться при увеличении времени τ_0 , на которое при модуляции перемещается импульс. Если это время не может быть больше τ , то

$$\tau_0 < \tau < \frac{1}{2f_m},$$

где f_m — максимальная частота передаваемого колебания.

Возьмем τ_0 максимально возможной величины, положив

$$\tau_0 = \frac{1}{2f_m}.$$

На практике величина τ_0 всегда будет несколько меньше этого значения. При таком значении τ_0 мы получим несколько завышенную помехоустойчивость, которая, исходя из формулы (11.33), определится величиной

$$\sigma^{*2} = \frac{48f_m^2\sigma^2}{\Omega^2 U_{\text{э}}^2} = \frac{12}{\pi^2} \left(\frac{2\pi f_m}{\Omega} \right)^2 \frac{\sigma^2}{U_{\text{э}}^2} = 1,21 \left(\frac{2\pi f_m}{\Omega} \right)^2 \frac{\sigma^2}{U_{\text{э}}^2}. \quad (11.34)$$

Величина $\frac{2\pi f_m}{\Omega}$ показывает, во сколько раз полоса частот, занимаемая сигналом при обычной амплитудной модуляции $2f_m$, будет меньше, чем полоса частот $\frac{\Omega}{\pi}$, занимаемая при время-импульсной модуляции. Сравнивая эту формулу с формулой (10.8), характеризующей обычную

амплитудную модуляцию, мы видим, что интенсивность помех на выходе идеального приемника будет при время-импульсной модуляции примерно во столько раз меньше, во сколько раз занимаемая в этом случае полоса частот будет больше.

Эффективное значение напряжения помехи на выходе идеального приемника при время-импульсной модуляции в полосе $0 - f_m$ в соответствии с формулой (2.57) будет:

$$\sqrt{EW_{1, \frac{T}{2T-1}}^2(t)} = \sigma^* \sqrt{f_m} = 1,1 \frac{2\pi f_m^{3/2}}{\Omega} \frac{\sigma}{U_s}. \quad (11.35)$$

11.7. Потенциальная помехоустойчивость при частотно-импульсной модуляции

При этом виде модуляции импульсы будут определяться выражением (7.37).

Интенсивность помехи на выходе идеального приемного устройства на основании формулы (7.40) будет:

$$\sigma^{*2} = \frac{24\tau\sigma^2}{\Omega^2 U_0^2 \tau_0^3}. \quad (11.36)$$

Эффективное значение колебания сигнала в данном случае в соответствии с формулами (7.39) и (11.18) будет:

$$U_{30}^2 = U_{эм}^2 = U_s^2 = \frac{U_0^2 \tau_0}{2\tau},$$

поскольку

$$\overline{TA^2(\mu, t)} = \frac{U_0^2 \tau_0}{2}.$$

Вводя эту величину в формулу (11.36), мы получим:

$$\sigma^{*2} = \frac{12\sigma^2}{\Omega^2 \tau_0^2 U_s^2}. \quad (11.37)$$

Сравнивая эту формулу с формулой (11.33), мы видим, что они совершенно идентичны. В обеих формулах приблизительно будет: $\frac{\Omega}{\pi}$ — полоса частот, занимаемая сигналом, τ_0 — время, отводимое для передачи одного импульса. Поэтому и все выводы относительно этой системы модуляции будут совпадать с выводами относительно время-импульсной модуляции, разобранных в предыдущем параграфе. В этом случае надо стараться также делать τ_0 возможно большей величины. Максимально возможная величина $\tau_0 = \tau$, как и раньше. Формула (11.34) и выводы из нее справедливы и для данного случая.

Для повышения помехоустойчивости при малых помехах применимы, конечно, также способы комбинированной модуляции, разобранные в § 7.9.

Глава 12

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ МОДУЛЯЦИИ**12.1. Определение**

Интегральными системами модуляции мы будем называть такие системы, при которых в аналитическое выражение сигнала входит не величина передаваемого колебания $F(t)$, а интеграл от этой величины $\int F(t)dt$.

Хорошо известным примером такой модуляции является частотная модуляция, при которой частота передаваемого колебания может быть записана так:

$$\omega = \omega_0 + \Omega F(t),$$

где Ω — девиация частоты; $F(t)$ — передаваемое колебание, величина которого меняется по условию в пределах ± 1 .

Аналитическое выражение для сигнала этой частоты, как хорошо известно, будет:

$$A_F(t) = U_0 \cos[\omega_0 t + \Omega \int F(t)dt]. \quad (12.1)$$

Как видно из формулы, данная модуляция будет отличаться от фазовой модуляции, даваемой формулой (10.10), тем, что в ней вместо функции фигурирует интеграл от этой функции.

Ясно, что можно создать очень много различных типов интегральной модуляции. Для этого достаточно в любой из формул для сигнала прямой модуляции заменить $F(t)$ на интеграл от этой величины.

12.2. Потенциальная помехоустойчивость при интегральных системах модуляции

При интегральной системе модуляции сигнал может быть записан так:

$$A_F(t) = A\left[\int F(t)dt, t\right] = A[\Psi, t], \quad (12.2)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi &= \int F(t)dt = \int \sum_{i=i_1}^{i_2} \left(\lambda_{2i-1} \sqrt{2} \sin \frac{2\pi}{T} it + \lambda_{2i} \sqrt{2} \cos \frac{2\pi}{T} it \right) dt = \\ &= \sum_{i=i_1}^{i_2} \left(-\frac{T\lambda_{2i-1}}{2\pi i} \sqrt{2} \cos \frac{2\pi}{T} it + \frac{T\lambda_{2i}}{2\pi i} \sqrt{2} \sin \frac{2\pi}{T} it \right), \quad (12.3) \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$D_i(t) = \frac{\partial A_F(t)}{\partial \lambda_i} = \frac{\partial A_F(t)}{\partial \Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_i},$$

причем:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_{2i-1}} &= -\frac{T}{2\pi i} \sqrt{2} \cos \frac{2\pi}{T} it, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_{2i}} &= \frac{T}{2\pi i} \sqrt{2} \sin \frac{2\pi}{T} it.\end{aligned}$$

Поэтому аналогично § 10.2

$$\overline{D_{2i-1}^2(t)} = \overline{D_{2i}^2(t)} = \left(\frac{T}{2\pi i}\right)^2 \overline{\left[\frac{\partial A_F(t)}{\partial \Psi}\right]}$$

и

$$\overline{D_k(t)D_l(t)} = 0$$

при $k \neq l$.

При доказательстве этих положений было принято, что функция

$$\left[\frac{\partial A_F(t)}{\partial \Psi}\right]^2$$

содержит синусоидальные составляющие лишь с частотами, большими, чем $\frac{2i_2}{T}$, т. е. большими, чем удвоенная максимальная частота, содержащаяся в передаваемом колебании $F(t)$.

Таким образом, для интегральных систем модуляции справедливы условия (9.15) и для них можно пользоваться формулой (9.27). Поэтому для этих систем интенсивность помехи на выходе идеального приемника:

$$\sigma^*\left(\frac{i}{T}\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{\left[\frac{\partial A_F(t)}{\partial \Psi}\right]^2}} \frac{2\pi i}{T}, \quad (12.4)$$

откуда интенсивность помехи на частоте f :

$$\sigma^*(f) = \frac{\sigma}{\sqrt{\left[\frac{\partial A_F(t)}{\partial \Psi}\right]^2}} 2\pi f. \quad (12.5)$$

Как мы видим из этой формулы, при интегральных системах модуляции интенсивность помехи на выходе идеального приемника увеличивается пропорционально частоте в отличие от систем модуляции, рассмотренных ранее.

Эффективное значение колебания помехи на выходе при этом в соответствии с формулой (Г.9) будет:

$$\sqrt{EW^{*2}(t)} = \sqrt{\int_0^\infty \sigma^{*2}(f) df} = \frac{2\pi\sigma}{\sqrt{\left[\frac{\partial A_F(t)}{\partial \Psi}\right]^2}} \sqrt{\int_0^{f_M} f^2 df} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \frac{\sigma f_M^{3/2}}{\sqrt{\left[\frac{\partial A_F(t)}{\partial \Psi}\right]^2}}. \quad (12.6)$$

12.3. Потенциальная помехоустойчивость при частотной модуляции

Применим полученную в предыдущем параграфе формулу к случаю частотной модуляции.

Сигнал частотной модуляции может быть представлен при помощи формулы (12.1). Таким образом, применяя обозначения предыдущего параграфа, мы получим:

$$A_F(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \Omega \Psi),$$

$$\frac{\partial A_F(t)}{\partial \Psi} = -U_0 \Omega \sin(\omega_0 t + \Omega \Psi).$$

Как можно убедиться, квадрат последнего колебания не содержит низких частот, если ω_0 достаточно велико.

Далее,

$$\overline{\left[\frac{\partial A_F(t)}{\partial \Psi} \right]^2} = \frac{U_0^2 \Omega^2}{2},$$

откуда на основании формулы (12.5) получим:

$$\sigma^*(f) = \frac{\sqrt{2} \sigma}{U_0} \frac{2\pi f}{\Omega}. \quad (12.7)$$

При этом виде модуляции эффективное значение сигнала равно:

$$U_s^2 = U_{s0}^2 = U_{эм}^2 = \frac{1}{2} U_0^2.$$

Поэтому для данного случая

$$\sigma^*(f) = \frac{2\pi f}{\Omega} \frac{\sigma}{U_s}. \quad (12.8)$$

Эффективное напряжение помехи на выходе идеального приемника при этой модуляции в соответствии с формулой (12.6) будет:

$$\sqrt{EW^{*2}(t)} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \frac{f_m^{3/2}}{\Omega} \frac{\sigma}{U_s} = 0,578 \frac{2\pi f_m^{3/2}}{\Omega} \frac{\sigma}{U_s}. \quad (12.9)$$

Сравнивая этот вид модуляции с время-импульсной и частотно-импульсной, потенциальная помехоустойчивость которых дается формулой (11.34), мы видим, что на наивысшей частоте f_m интенсивность помехи на выходе идеального приемника в обоих случаях будет примерно одинаковой.

При частотной модуляции с уменьшением частоты интенсивность этой помехи будет уменьшаться, в отличие от импульсных систем, где она остается постоянной. Это дает меньшее значение эффективного напряжения помехи на выходе идеального приемника при частотной модуляции по сравнению с импульсной примерно в 2 раза, как это следует из сличения формул (11.35) и (12.9).

Сравнение помехоустойчивости идеального приемника с помехоустойчивостью обычно применяемого реального приемника показывает, что эти помехоустойчивости при частотной модуляции и малых помехах одинаковы.

Глава 13

ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ БОЛЬШИХ ПОМЕХ НА ПЕРЕДАЧУ КОЛЕБАНИЙ

13.1. Общие соображения

В этой главе показано, как можно оценить потенциальную помехоустойчивость систем, служащих для передачи колебаний, при больших помехах.

Точная оценка влияния помех в этом случае бывает часто весьма затруднительной. Тут колебание помехи на выходе приемника может и не быть нормально флюктуационным и может зависеть от передаваемого колебания. Однако нетрудно получить примерную оценку влияния большой помехи при помощи максимальной предельной разборчивости переданных колебаний, которая не может быть превзойдена при данном способе передачи и данной интенсивности помехи ни при каком приемнике.

13.2. Максимальная разборчивость переданных колебаний

Пусть передается некоторое, скажем, звуковое колебание $F_1(t)$. В этом случае передаваемый сигнал будет $A_{F_1}(t)$. На этот сигнал пусть наложится помеха $W_{\mu,\nu}(t)$ в результате чего приемник воспроизведет на своем выходе уже не колебание $F_1(t)$, а некоторое другое, являющееся искаженным помехой колебанием $F_1(t)$. Если бы вместо колебания $F_1(t)$ передавалось колебание $F_2(t)$, то передаваемый сигнал был бы $A_{F_2}(t)$. В этом случае колебание на выходе приемника под действием помехи имело бы вид искаженного колебания $F_2(t)$. Степень искажения, создаваемого помехой, может быть оценена вероятностью того, что по воспроизведенному приемником колебанию (в данном случае звуку) мы правильно определим, передавалось ли колебание $F_1(t)$ или $F_2(t)$. Эта вероятность может быть получена экспериментально, например при помощи следующего артикуляционного опыта, пригодного для случая телефонии. Пусть передается то звуковое колебание $F_1(t)$, то колебание $F_2(t)$, чередуясь в каком-то неизвестном на приемном конце порядке, но так, чтобы в среднем оба колебания передавались одинаково часто. Пусть на приемном конце некоторый слушатель записывает каждый раз какое, по его мнению, передавалось колебание. Очевидно, в ряде случаев он запишет правильно, а в ряде случаев неправильно, что можно будет установить последующей

проверкой. Тогда при достаточно большом количестве опытов число правильно записанных звуков, деленное на полное число переданных звуков, и будет равно искомой вероятности.

Максимальное возможное значение этой вероятности при заданном способе передачи, т. е. при заданных сигналах $A_{F_1}(t)$ и $A_{F_2}(t)$, может быть легко найдено теоретически.

Действительно, в гл. 4 мы нашли вероятность того, что идеальный приемник при наложении помехи на сигнал правильно определит, какой из двух заранее известных сигналов передавался. Было также показано, что никакой другой способ приема не сможет обеспечить большую вероятность.

Если мы по колебанию на выходе приемника правильно определим, какое из двух колебаний — $F_1(t)$ или $F_2(t)$ — передавалось, то тем самым мы определим, какой из сигналов — $A_{F_1}(t)$ или $A_{F_2}(t)$ — был послан. Поэтому вероятность того, что по искаженному помехой колебанию на выходе приемника мы правильно определим, какое из колебаний — $F_1(t)$ или $F_2(t)$ — передавалось, не может быть больше вероятности правильного распознавания сигналов $A_{F_1}(t)$ и $A_{F_2}(t)$ идеальным приемником. Последняя вероятность согласно §4.1 будет равна:

$$1 - P_{\text{иск}} = 1 - U(\alpha), \quad (13.1)$$

где

$$\alpha = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}T[A_{F_1}(t) - A_{F_2}(t)]^2}}{\sigma}. \quad (13.2)$$

Этим способом можно оценить разборчивость, которая не может быть превзойдена при данных колебаниях, данном способе модуляции и данной интенсивности помехи.

Изложенным способом также, очевидно, можно в ряде случаев определить, насколько при больших помехах данное приемное устройство близко к идеальному.

Действительно, если окажется, что вероятность, определенная экспериментально при помощи описанного выше «артикуляционного» опыта, будет близка к вероятности, даваемой формулой (13.1), то это будет значить, что данный приемник дает почти максимально возможную защиту от больших помех флюктуационного типа при заданном способе передачи. Это также будет значить, что другие приемники большей защиты от этой помехи при передаче колебаний $F_1(t)$ и $F_2(t)$ дать не смогут.

Очевидно, ценность описанного метода может быть определена лишь после его практического применения.

В рассмотренном здесь способе используются колебания, могущие иметь два дискретных значения. Очевидно также, что можно развить способ оценки и при помощи многих дискретных колебаний.

13.3. Максимальная разборчивость при фазовой модуляции

Для иллюстрации метода, разработанного в предыдущем параграфе, приложим его к частному случаю фазовой модуляции,

Пусть для испытания влияния помехи передается либо колебание

$$\begin{aligned} F_1(t) &= \sin \Omega t && \text{при } -\frac{\tau_0}{2} < t < \frac{\tau_0}{2} \text{ и} \\ F_1(t) &= 0 && \text{при } -\frac{\tau_0}{2} > t > \frac{\tau_0}{2}, \end{aligned} \quad (13.3)$$

либо отсутствие всякого колебания, т. е.

$$F_2(t) = 0. \quad (13.4)$$

Пусть исследуется фазовая модуляция, при которой посылаемый сигнал равен:

$$A_F(t) = U_0 \cos[\omega_0 t + mF(t)]. \quad (13.5)$$

Тогда в нашем случае мы получим:

$$A_{F_1}(t) = U_0 \cos[\omega_0 t + m \sin \Omega t] \quad (13.6)$$

при $-\frac{\tau_0}{2} < t < \frac{\tau_0}{2}$,

$$A_{F_1}(t) = U_0 \cos \omega_0 t \quad (13.7)$$

при $t < -\frac{\tau_0}{2}$ и $t > \frac{\tau_0}{2}$ и

$$A_{F_2}(t) = U_0 \cos \omega_0 t. \quad (13.8)$$

Подставляя эти выражения в (13.2) и принимая для упрощения, что $\omega_0 \gg \Omega$, $\frac{\Omega \tau_0}{\pi}$ — целое число, получим:

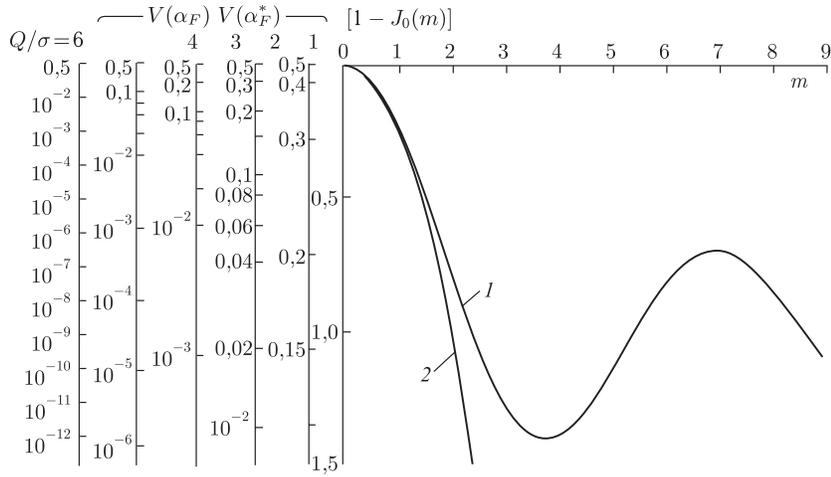
$$\alpha^2 = \frac{Q^2}{\sigma^2} [1 - J_0(m)], \quad (13.9)$$

где $J_0(m)$ — функция Бесселя нулевого порядка от m ,

$$Q^2 = \frac{U_0^2 \tau_0}{2}. \quad (13.10)$$

Подставляя полученное значение α в формулу (13.1), мы получим величину, которую не может превзойти вероятность правильного распознавания колебаний $F_1(t)$ и $F_2(t)$ на выходе приемника при помехе с интенсивностью σ .

На фиг. 13.1 по оси абсцисс отложена величина m , а для кривой I по оси ординат $1 - J_0(m)$. Последнее выражение будет полностью определять величину $V(\alpha)$, входящую в формулу (13.1), если мы зададимся значением Q/σ . Поэтому по оси ординат этой фигуры можно также отложить и значение $V(\alpha)$, если задаваться величиной Q/σ , что и сделано для значений $Q/\sigma = 1, 2, 3, 4, 6$. Как видно из этой фигуры, величина $V(\alpha)$ увеличивается, если $m > 4$.



Фиг. 13.1. Вероятность ошибки при передаче синусоидального колебания при помощи фазовой модуляции и идеального приемника для разных $\frac{Q}{\sigma}$. Кривая 1 — точная; кривая 2 — приближенная, полученная по формулам для малых помех; m — индекс модуляции; Q^2 определяется формулой (13.10)

Причиной этого, очевидно, является следующее. При столь больших m , для того чтобы произошла ошибка в обнаружении звука $F(t)$, колебание помехи должно достигать в то время, когда этот звук ожидается, такой большой величины, при которой фазовая модуляция уже перестает обеспечивать хорошую защиту от помех. При таком большом колебании помехи передаваемые звуки, очевидно, не могут быть правильно определены среди шума на выходе приемника независимо от индекса модуляции m .

13.4. Максимальная разборчивость при малых помехах

Для выявления специфики, которую вносят большие помехи, определим максимальную разборчивость, исходя из теории, выведенной в предыдущих главах для случая малых помех.

При передаче колебания $F_2(t)$ при малых помехах и идеальном приемнике на его выходе мы получим колебание

$$F_1(t) + W^*(t) \tag{13.11}$$

и при передаче $F_1(t)$ колебание

$$F_2(t) + W^*(t), \tag{13.12}$$

где $W^*(t)$ — нормальное флюктуационное колебание с интенсивностью σ^* , определяемой формулой (9.27). Мы ограничимся случаем,

когда σ^* от частоты не зависит, как это имело место всюду, кроме интегральной модуляции.

Вероятность того, что по функциям (13.11) и (13.12) мы правильно определим, какое из колебаний — $F_1(t)$ или $F_2(t)$ — передавалось при идеальном индикаторе (идеальном ухе), как было доказано в § 4.1, будет равна:

$$1 - P_{(\text{иск})} = 1 - V(\alpha^*), \quad (13.13)$$

где

$$\alpha^* = \sqrt{\frac{T[F_2(t) - F_1(t)]^2}{2\sigma^{*2}}}. \quad (13.14)$$

Очевидно, в соответствии со сказанным в § 13.2 величина (13.13) не может быть больше величины вероятности, даваемой формулой (13.1). Если окажется, что это не так, то это будет означать, что вероятность (13.13) получена неправильно и, значит, неверно предположение о том, что помеха достаточно мала.

В следующем параграфе мы на примере фазовой модуляции сравним полученный тут способ оценки максимальной разборчивости с общим способом, разобранным в § 13.2.

13.5. Максимальная разборчивость при малых помехах и фазовой модуляции

Приложим сказанное в предыдущем параграфе к случаю фазовой модуляции, которую мы рассматривали в § 13.3.

Предполагая, что испытательные колебания $F_1(t)$ и $F_2(t)$ будут определяться, как и раньше, формулами (13.3) и (13.4), мы на основании выражений (13.14) и (10.11) получим:

$$\alpha^{*2} = \frac{U_0^2 m^2}{4\sigma^2} \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} \sin^2 \Omega t \, dt = \frac{Q^2 m^2}{4\sigma^2}.$$

Мы приняли для упрощения, что $\frac{\Omega\tau_0}{\pi}$ равно целому числу, и обозначили

$$\frac{\tau_0 U_0^2}{2} = Q^2.$$

На фиг. 13.1 кривая 2 дает зависимость величины $m^2/4$ от m . Таким образом, по этой кривой, задаваясь различными значениями отношения Q/σ , мы можем определить величину $V(\alpha^*)$ так же, как в § 13.3 определяли величину $V(\alpha)$ по кривой 1.

Как мы видим из этой фигуры, лишь пока индекс модуляции $m < 2$, обе кривые идут близко. В случае же, когда $m > 2$, значение $V(\alpha)$ даваемое кривой 1, становится значительно больше значения $V(\alpha^*)$, даваемого кривой 2. Из этого следует, что величина (13.13), опре-

деленная на основании формул, выведенных для малых помех, при $m > 2$ неправильна и, значит, для этого случая теория малых помех непригодна.

Этот результат следует истолковывать, очевидно, так:

Пока испытательное колебание $F_1(t)$ дает малый индекс модуляции $m < 2$, его маскировка на выходе приемника будет осуществляться достаточно малым колебанием помехи, при котором справедливы выражения (13.11) и (13.12). В случае, если испытательное колебание создает индекс модуляции $m > 2$, маскировка этого колебания на выходе приемника произойдет лишь в том случае, если колебание помехи во время передачи колебания $F_1(t)$ достигнет такой большой величины, при которой выражение (13.13) и теория малых помех неправильны.

Приложение А

Удельная энергия высокочастотных колебаний

Как известно, высокочастотный сигнал может быть в общем виде представлен так:

$$A(t) = U_m(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]. \quad (\text{А.1})$$

Удельная энергия этого сигнала будет равна:

$$Q^2 = T \overline{A^2(t)} = T \overline{U_m^2(t) \cos^2[\omega_0 t + \varphi(t)]}.$$

Если затем принять, как это обычно бывает, что ω_0 настолько велико, что частоты, практически существующие в выражении $\cos[2\omega_0 t + 2\varphi(t)]$, все будут выше частот, содержащихся в функции $U_m^2(t)$, и что постоянная составляющая выражения $\cos[2\omega_0 t + 2\varphi(t)]$ по этой же причине может быть принята равной нулю, то на основании формулы (2.26) мы получим:

$$Q^2 = T \overline{A^2(t)} = \frac{1}{2} T \overline{U_m^2(t)} = \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{+T/2} U_m^2(t) dt. \quad (\text{А.2})$$

Приложение Б

Выражение нормально флюктуационного колебания двумя амплитудно-модулированными колебаниями

Рассмотрим нормально флюктуационное колебание с частотами от $\frac{\mu}{T}$ до $\frac{\nu}{T}$ и постоянной интенсивностью.

Обозначим:

$$l_0 = \frac{\nu + \mu}{2}, \quad n = \frac{\nu - \mu}{2}. \quad (\text{Б.1})$$

Пусть это будут целые числа. Тогда колебание (2.54) можно записать так:

$$\begin{aligned} W_{\mu, \nu}(t) &= \frac{\sigma}{\sqrt{T}} \sum_{i=-n}^n \left[\theta_{2l_0+2i-1} \sin \frac{2\pi}{T} (l_0 + i)t + \theta_{2l_0+2i} \cos \frac{2\pi}{T} (l_0 + i)t \right] = \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{T}} \sum_{i=-n}^n \left\{ \theta_{2l_0+2i-1} \left[\sin \frac{2\pi}{T} it \cos \frac{2\pi}{T} l_0 t + \cos \frac{2\pi}{T} it \sin \frac{2\pi}{T} l_0 t \right] + \right. \\ &\quad \left. + \theta_{2l_0+2i} \left[\cos \frac{2\pi}{T} it \cos \frac{2\pi}{T} l_0 t - \sin \frac{2\pi}{T} it \sin \frac{2\pi}{T} l_0 t \right] \right\}. \quad (\text{Б.2}) \end{aligned}$$

Обозначая $\frac{2\pi}{T}l_0 = \omega_0$ и вынося за скобки $\cos \omega_0 t$ и $\sin \omega_0 t$, получим:

$$W_{\mu, \nu}(t) = \frac{\sigma}{\sqrt{T}} \sum_{i=-n}^n \left(\theta_{2l_0+2i-1} \sin \frac{2\pi}{T} it + \theta_{2l_0+2i} \cos \frac{2\pi}{T} it \right) \cos \omega_0 t + \\ + \frac{\sigma}{\sqrt{T}} \sum_{i=-n}^n \left(\theta_{2l_0+2i-1} \cos \frac{2\pi}{T} it - \theta_{2l_0+2i} \sin \frac{2\pi}{T} it \right) \sin \omega_0 t. \quad (\text{Б.3})$$

Наконец, складывая члены с одинаковыми по абсолютной величине i , получим:

$$W_{\mu, \nu} = \frac{\sigma}{\sqrt{T}} \sum_{i=1}^n \left[(\theta_{2l_0+2i-1} - \theta_{2l_0-2i-1}) \sin \frac{2\pi}{T} it + \right. \\ \left. + (\theta_{2l_0+2i} + \theta_{2l_0-2i}) \cos \frac{2\pi}{T} it \right] \cos \omega_0 t + \\ + \frac{\sigma}{\sqrt{T}} \sum_{i=1}^n \left[(\theta_{2l_0+2i-1} + \theta_{2l_0-2i-1}) \cos \frac{2\pi}{T} it + \right. \\ \left. + (\theta_{2l_0-2i} - \theta_{2l_0+2i}) \sin \frac{2\pi}{T} it \right] \sin \omega_0 t. \quad (\text{Б.4})$$

Здесь мы пренебрегли членами с $i = 0$, что допустимо, если взять T достаточно большим, так как при сохранении граничных частот μ/T и ν/T и увеличении T число членов суммы будет расти, а каждый член стремится к нулю.

Далее обозначим:

$$\theta_{2l_0+2i-1} - \theta_{2l_0-2i-1} = \sqrt{2} \theta''_{2i-1}, \\ \theta_{2l_0+2i-1} + \theta_{2l_0-2i-1} = \sqrt{2} \theta'_{2i}, \\ \theta_{2l_0+2i} + \theta_{2l_0-2i} = \sqrt{2} \theta''_{2i}, \\ \theta_{2l_0-2i} - \theta_{2l_0+2i} = \sqrt{2} \theta'_{2i-1}, \quad (\text{Б.5})$$

где $\theta'_{2i-1}, \theta''_{2i-1}, \theta'_{2i}, \theta''_{2i}$ согласно § 2.5 будут взаимно независимые случайные величины. Подставляя эти величины в (Б.4), получим:

$$W_{\mu, \nu}(t) = W_{l_0-n, l_0+n}(t) = \sqrt{2} W'_{1, n}(t) \sin \omega_0 t + \sqrt{2} W''_{1, n}(t) \cos \omega_0 t, \\ \text{где}$$

$$W'_{1, n}(t) = \frac{\sigma}{\sqrt{T}} \sum_{i=1}^n \left(\theta'_{2i-1} \sin \frac{2\pi}{T} it + \theta'_{2i} \cos \frac{2\pi}{T} it \right), \quad (\text{Б.6}) \\ W''_{1, n}(t) = \frac{\sigma}{\sqrt{T}} \sum_{i=1}^n \left(\theta''_{2i-1} \sin \frac{2\pi}{T} it + \theta''_{2i} \cos \frac{2\pi}{T} it \right)$$

— независимые друг от друга нормально флюктуационные колебания с частотами от нуля до $\frac{n}{T} = \frac{\nu - \mu}{2T}$.

Величина $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}l_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{T}\nu + \frac{2\pi}{T}\mu\right)$ — средняя угловая частота колебания $W_{\mu,\nu}(t)$.

Приложение В

Мгновенное значение нормально флюктуационного колебания

Найдем значение нормально флюктуационного колебания с постоянной интенсивностью для некоторого момента времени $t = t_1$.

В соответствии с формулами (2.54) и (2.74) будем иметь:

$$\begin{aligned} W_{\mu,\nu}(t_1) &= \frac{\sigma}{T} \sum_{l=\mu}^{\nu} \left(\theta_{2l-1} \sin \frac{2\pi}{T} l t_1 + \theta_{2l} \cos \frac{2\pi}{T} l t_1 \right) = \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{T}} \sqrt{\sum_{l=\mu}^{\nu} \left(\sin^2 \frac{2\pi}{T} l t_1 + \cos^2 \frac{2\pi}{T} l t_1 \right)} \theta_1 = \sigma \sqrt{\frac{\nu - \mu + 1}{T}} \theta_1, \quad (\text{B.1}) \end{aligned}$$

где θ_1 — нормальная случайная величина.

Вводя граничные частоты рассматриваемого колебания $f_\nu = \nu/T$ и $f_\mu = \mu/T$, получим для большого T

$$W_{\mu,\nu}(t_1) = \sigma \sqrt{f_\nu - f_\mu} \theta_1. \quad (\text{B.2})$$

Среднеквадратичное значение $W_{\mu,\nu}(t)$ будет равно $\sigma \sqrt{f_\nu - f_\mu}$, что согласуется с (2.57).

Приложение Г

Нормально флюктуационное колебание из произвольных импульсов

Рассмотрим прохождение нормально флюктуационного колебания через линейную систему. Пусть на вход этой системы действует колебание $W_{1,\nu}(t)$, даваемое формулами (2.54) и (2.27) и состоящее из весьма коротких импульсов (2.28).

Это колебание может быть записано так:

$$W_{1,\nu}(t) = \sum_{l=1}^{\nu} \frac{\sigma}{\sqrt{T}} \left(\theta_{2l-1} \sin \frac{2\pi}{T} l t + \theta_{2l} \cos \frac{2\pi}{T} l t \right),$$

где ν может быть сколь угодно велико, если импульсы брать достаточно короткими.

Колебание на выходе системы будет:

$$W^*(t) = \sum_{l=1}^{\nu} \frac{\sigma k\left(\frac{l}{T}\right)}{\sqrt{T}} \left\{ \theta_{2l-1} \sin \left[\frac{2\pi}{T} lt + \varphi\left(\frac{l}{T}\right) \right] + \theta_{2l} \cos \left[\frac{2\pi}{T} lt + \varphi\left(\frac{l}{T}\right) \right] \right\}, \quad (\Gamma.1)$$

где $k\left(\frac{l}{T}\right)e^{j\varphi\left(\frac{l}{T}\right)}$ — комплексный коэффициент передачи системы на частоте l/T .

Раскрывая синусы и косинусы, входящие в это выражение, получим:

$$W^*(t) = \sum_{l=1}^{\nu} \frac{\sigma k\left(\frac{l}{T}\right)}{\sqrt{T}} \left\{ \left[\theta_{2l-1} \cos \varphi\left(\frac{l}{T}\right) - \theta_{2l} \sin \varphi\left(\frac{l}{T}\right) \right] \sin \frac{2\pi}{T} lt + \left[\theta_{2l-1} \sin \varphi\left(\frac{l}{T}\right) + \theta_{2l} \cos \varphi\left(\frac{l}{T}\right) \right] \cos \frac{2\pi}{T} lt \right\}. \quad (\Gamma.2)$$

На основании формул (2.74) и (2.75) будем иметь:

$$\theta_{2l-1} \cos \varphi\left(\frac{l}{T}\right) - \theta_{2l} \sin \varphi\left(\frac{l}{T}\right) = \sqrt{\cos^2 \varphi\left(\frac{l}{T}\right) + \sin^2 \varphi\left(\frac{l}{T}\right)} \theta_{2l-1}^* = \theta_{2l-1}^*$$

и

$$\theta_{2l-1} \sin \varphi\left(\frac{l}{T}\right) + \theta_{2l} \cos \varphi\left(\frac{l}{T}\right) = \sqrt{\sin^2 \varphi\left(\frac{l}{T}\right) + \cos^2 \varphi\left(\frac{l}{T}\right)} \theta_{2l}^* = \theta_{2l}^*,$$

где θ_{2l-1}^* и θ_{2l}^* — нормальные случайные величины, независимые друг от друга, поскольку условие (2.76) тут удовлетворяется.

Действительно,

$$\cos \varphi\left(\frac{l}{T}\right) \sin \varphi\left(\frac{l}{T}\right) - \sin \varphi\left(\frac{l}{T}\right) \cos \varphi\left(\frac{l}{T}\right) = 0.$$

На основании сказанного получим:

$$W^*(t) = \sum_{l=1}^{\nu} \frac{\sigma^*\left(\frac{l}{T}\right)}{\sqrt{T}} \left(\theta_{2l-1}^* \sin \frac{2\pi}{T} lt + \theta_{2l}^* \cos \frac{2\pi}{T} lt \right), \quad (\Gamma.3)$$

где

$$\sigma^*\left(\frac{l}{T}\right) = \sigma k\left(\frac{l}{T}\right). \quad (\Gamma.4)$$

Как видно из этого выражения, на статистические свойства колебания (Г.3) фазовая характеристика системы $\varphi\left(\frac{l}{T}\right)$ не влияет.

Колебание $W^*(t)$ будем называть нормально флюктуационным колебанием с переменной интенсивностью

$$\sigma^*\left(\frac{l}{T}\right) = \sigma(f).$$

Колебание $W_{\mu, \nu}(t)$, действующее на вход системы, состоит из коротких импульсов. Каждый из этих импульсов будет вызывать на выходе системы свой импульс, форма которого будет определяться комплексным коэффициентом передачи $k\left(\frac{l}{T}\right)e^{j\varphi\left(\frac{l}{T}\right)}$. Таким образом, можно считать, что колебание $W^*(t)$ образуется наложением большого числа хаотически расположенных по времени подобных импульсов.

Интенсивность колебания на выходе системы можно и прямо найти по спектральным функциям импульсов на выходе.

Действительно, модуль спектральной функции⁴⁾ k -того импульса на выходе будет:

$$\left|g_k\left(2\pi\frac{l}{T}\right)\right| = q_k k\left(\frac{l}{T}\right), \quad (\text{Г.5})$$

где q_k определяется формулой (2.32) и является модулем спектральной функции k -того импульса на входе, поскольку они там бесконечно короткие¹. Поэтому, учитывая (2.39) и (0.4), получим:

$$\sigma^{*2}\left(\frac{l}{T}\right) = \sigma^2 k^2\left(\frac{l}{T}\right) = \frac{2 \sum_{k=1}^n q_k^2 k^2\left(\frac{l}{T}\right)}{T} = \frac{2}{T} \sum_{k=1}^n \left|g_k\left(2\pi\frac{l}{T}\right)\right|^2.$$

Таким образом, сумма большого числа случайно расположенных по времени импульсов, имеющих модули спектральных функций (Г.5), будет нормально флюктуационным колебанием (Г.3) с интенсивностью

$$\sigma^*(f) = \sqrt{\frac{2}{T} \sum_{k=1}^n |g_k(2\pi f)|^2}, \quad (\text{Г.6})$$

где сумма берется по всем импульсам на интервале $-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}$.

Сумма независимых нормально флюктуационных колебаний с переменными интенсивностями

$$W^{*'}(t) + W^{*''}(t) + W^{*'''}(t) + \dots, \quad (\text{Г.7})$$

как нетрудно доказать, проведя рассуждения, аналогичные предыдущему, также будет нормально флюктуационным колебанием с интенсивностью, равной $\sigma^*(f)$, для которой

$$\sigma^{*2}(f) = \sigma'^2(f) + \sigma''^2(f) + \sigma'''^2(f) + \dots, \quad (\text{Г.8})$$

⁴⁾ См., например, В. А. Котельников и А. М. Николаев, Основы радиотехники, ч. I, Связьтехиздат, 1950, § 8.5.

где $\sigma'(f), \sigma''(f), \sigma'''(f)$ — интенсивности колебаний $W^{*'}(t), W^{*''}(t), W^{*'''}(t), \dots$

Таким образом, колебание, состоящее из хаотически расположенных импульсов различной формы, также является нормально флюктуационным.

Найдем еще эффективное значение нормально флюктуационного колебания с переменной интенсивностью (Г.3).

В соответствии с теорией рядов Фурье квадрат эффективного значения будет равен:

$$\overline{W^{*2}(t)} = \sum_{l=1}^{\nu} \frac{\sigma^{*2}(f_l)}{2T} (\theta_{2l-1}^{*2} + \theta_{2l}^{*2}),$$

где $f_l = \frac{l}{T}$.

Усредняя это значение для ряда опытов, получим:

$$E\overline{W^{*2}(t)} = \sum_{l=1}^{\nu} \sigma^{*2}(f_l)(f_{l+1} - f_l),$$

поскольку $E\theta_{2l-1}^{*2} = E\theta_{2l}^{*2} = 1$ и $f_{l+1} - f_l = \frac{1}{T}$.

При увеличении T разности $f_{l+1} - f_l$ будут стремиться к нулю и

$$\lim_{\substack{\nu \rightarrow \infty \\ T \rightarrow 0}} E\overline{W^{*2}(t)} \rightarrow \int_0^{\infty} \sigma^{*2}(f)df,$$

откуда среднее эффективное значение колебания (Г.3) при достаточно больших T будет:

$$\sqrt{E\overline{W^{*2}(t)}} = \sqrt{\int_0^{\infty} \sigma^{*2}(f)df}. \quad (\text{Г.9})$$

Если $\sigma^*(f)$, начиная с f_m , будет равно 0, то верхний предел будет f_m .